Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea
30 ottobre 2009

Sulle Funzioni a Variazione Limitata in Spazi di Wiener

Candidato
Eris Runa

Relatore
Prof. Luigi Ambrosio
Scuola Normale Superiore

Controrelatore
Prof. Maurizio Pratelli
Università di Pisa

Anno Accademico 2008/2009

INDICE

INTRODUZIONE

Questa tesi consta di due parti. La prima parte è dedicata alla teoria classica delle funzioni a variazione limitata in spazi Euclidei finito dimensionali, ad alcune delle molteplici relazioni tra funzioni BV e la Teoria Geometrica della Misura ed al celebre Teorema di Struttura di De Giorgi. La seconda parte è dedicata alla generalizzazione di questa teoria per spazi di Wiener, i.e. spazi di Banach muniti di una misura Gaussiana, dovuta a M. Fukushima e M. Hino utilizzando un approccio probabilistico tramite le forme di Dirichlet (v. [25, 26]), e recentemente ripresa da L. Ambrosio, M. Miranda, S. Maniglia e D. Pallara, utilizzando un approccio più integral-geometrico (v. [4, 5]).

In analisi matematica, una funzione integrabile si dice a variazione limitata (o, più semplicemente, BV) se le sue derivate distribuzionali sono misure di Radon. Sostanzialmente questo è il senso più debole che si può dare ad una derivata tramite la teoria della misura. Le funzioni BV si possono caratterizzare, grazie al teorema di Riesz, come quelle funzioni u per cui la variazione, definita da

$$V(u,\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi)\, dx : \varphi \in [C_c^1(\Omega)]^n,\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\},$$

è, appunto, limitata. Inoltre, ciò è equivalente a chiedere che esista una successione di funzioni regolari $\{u_h\}$, che abbiano norma L^1 del gradiente equilimitata, tali che $u_h \to u$ in L^1. Un risultato che rende le funzioni a variazione limitata uno strumento particolarmente utile, specialmente nelle applicazioni, è il teorema di compattezza: se $\{u_n\}$ è una successione di funzioni limitata in L^1 ed avente variazione equilimitata allora si può estrarre una sottosuccessione convergente in L^1. Nel caso particolare in cui la funzione caratteristica di un insieme E abbia variazione limitata si parla di insiemi di perimetro finito. Utilizzando la caratterizzazione tramite la variazione delle funzioni BV, è immediato osservare che la funzione caratteristica di un insieme di perimetro finito E appartiene alla classe delle funzioni BV se e solo se E ha misura finita.

Supponiamo che E sia un insieme aperto con frontiera regolare (è sufficiente di classe C^1), allora si ha $D\chi_E = -\nu(x)\cdot\sigma$, dove σ è la misura superficiale su ∂E e ν è la normale interna a E. Infatti, per il teorema della divergenza si ha

$$\int_E \operatorname{div}(g)\, dx = -\int_{\partial E} \langle \nu, g\rangle\, d\sigma \qquad \forall g \in [C_c^1(\mathbb{R}^n)]^n.$$

Vogliamo generalizzare questa formula per gli insiemi di perimetro finito. Dato che modificare E su insiemi di misura nulla secondo Lebesgue non fa variare la derivata distribuzionale, per ottenere una tale generalizzazione avremo bisogno di una definizione di frontiera invariante rispetto a modifiche di E in insiemi di misura nulla, ed inoltre dato che una tale frontiera non sarà una varietà immersa, avremo inoltre bisogno di un appropriata definizione di misura m-dimensionale in $\mathbb{R}^n$, almeno per $m = n-1$.

Due definizioni di frontiera che risulteranno utili sono:

La frontiera ridotta $\mathcal{F}E$ è definita come l'insieme di tutti i punti x tali che esiste il

$$limite \nu_E(x) := \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E(B_\rho(x))|}$$

e $|\nu_E(x)| = 1$.
La frontiera essenziale $\partial_* E$ è definita come l'insieme dei punti x in cui il limite

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|E \cap B(x,\rho)|}{\omega_k \rho^k}$$

non esiste oppure esiste e non appartiene a $\{0,1\}$.

In $\mathbb{R}^n$ la misura di Lebesgue è l'unica misura (a meno di costanti moltiplicative) Borel regolare e invariante rispetto al gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^n$. Tuttavia, non esiste "un'unica" misura m-dimensionale, con $m < n$. Infatti, utilizzando il procedimento di Carathèodory costruiremo diverse misure Borel regolari, invarianti rispetto al gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ e tali che la loro restrizione alle m-varietà di classe C^1 immerse in $\mathbb{R}^n$ coincida con la misura di area nel senso della Geometria Differenziale, pur non coincidendo su insiemi più generali delle varietà m-dimensionali. Una delle misure più importanti in questo ambito è la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^m$. Diremo inoltre che un insieme A è $\mathcal{H}^m$-rettificabile se esiste una famiglia numerabile $\{C_i\}$ di m-sottovarietà in $\mathbb{R}^n$, tale che A è contenuto in $\bigcup C_i$ a meno di insiemi $\mathcal{H}^m$-nulli.

Otterremo una descrizione completa della struttura degli insiemi di perimetro finito dovuta a E. De Giorgi: dimostreremo che la frontiera ridotta $\mathcal{F}E$ è $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile e che $D\chi_E$ coincide con $\nu_E \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Infine vedremo che la frontiera ridotta e quella essenziale differiscono in un insieme nullo rispetto alla misura $\mathcal{H}^{n-1}$. Un ingrediente fondamentale per la dimostrazione sia della rettificabilità che della coincidenza di $D\chi_E$ con $\nu_E \cdot \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$ è il Lemma di Ricoprimento di Besicovich-Vitali.

Nel contesto infinito-dimensionale, com'è noto, non esiste un equivalente della misura di Lebesgue. Più precisamente, non esiste una misura in uno spazio di Banach X infinito-dimensionale tale che le sue traslazioni, rispetto ad una qualsiasi direzione, siano equivalenti a lei. Nel caso in cui la misura sia Gaussiana, si dimostra l'esistenza di un sottospazio lineare H (il cosiddetto spazio di Cameron-Martin) denso nello spazio di Banach iniziale X tale che la misura Gaussiana traslata lungo le direzioni in H è equivalente alla misura Gaussiana iniziale. Per come è stato costruito H, esiste un'isometria $R : \mathscr{H} \to H$, dove $\mathscr{H}$ è la chiusura di X^* in L^2, avendo identificato $x^* \in X^*$ con la mappa $\langle x^*, \cdot \rangle$.

Per ogni $f : X \to \mathbb{R}$, definiamo

$$\partial_h f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

se tale limite esiste ed inoltre poniamo $\partial_h^* f := \partial_h f - f\hat{h}$, dove $\hat{h}$ è l'elemento di $\mathscr{H}$ tale che $R\hat{h} = h$. Nel caso in cui $f, g : X \to \mathbb{R}$ siano sufficientemente regolari dimostreremo che

$$\int g(x) \partial_h f(x)\, d\gamma(x) = - \int f(x) \partial_h^* g(x)\, \gamma(x).$$

Ritrovare le formule d'integrazione per parti ci permette di introdurre, in maniera simile a quello che si fa in teoria delle distribuzioni, un concetto di derivata debole lungo le direzioni in H e quindi, in maniera analoga a quanto fatto in precedenza, diremo che la funzione u ha variazione limitata se esiste una misura $D_\gamma u$ a valori in H tale che, per ogni direzione $x^* \in X^*$, la derivata debole lungo $h = Rx^*$ è eguale a $\langle D_\gamma u, h \rangle_H$. Si definisce in maniera simile la variazione di una funzione u. Diversamente dal caso finito-dimensionale non vale il Teorema di Riesz: il duale delle funzioni continue e limitate è costituito da misure additive, e quindi non è possibile dedurre immediatamente l'appartenenza allo spazio BV. Ciò nonostante dimostreremo l'equivalente della caratterizzazione per le funzioni BV fatta nel caso finito dimensionale. Diremo che un insieme E ha perimetro finito se la sua caratteristica appartiene allo spazio delle funzioni BV. Per ottenere una versione del Teorema di Struttura nel caso infinito-dimensionale avremo bisogno di una misura di codimensione uno in X e di un'appropriata definizione di frontiera.

Per la costruzione della misura di codimensione uno utilizzeremo un procedimento simile a quello seguito da D. Feyel e A. de la Pradelle in [24]. Fissiamo un sistema ortonormale $\{h_i\}$ di H tale che $h_i = Rx_i^*$, dove $x_i^* \in X^*$. Denotiamo con π_n la proiezione sul sottospazio $H_n := \operatorname{span}\{h_1, \ldots, h_n\}$, definita da

$$\pi_n(x) := \sum_{i=1}^{n} x^*(x) h_i,$$

con $\hat{H}_n$ il nucleo di π_n e con $\pi_n^\perp := \mathbf{Id} - \pi_n$, dove $\mathbf{Id}$ è l'identità su X. Non è difficile vedere che $H_n \times \hat{H}_n$ è isomorfo a X come spazio di Banach. In H_n definiamo la misura $\theta^n := G_n \cdot \mathcal{S}^{n-1}$, dove $\mathcal{S}^{n-1}$ è la misura di Hausdorff sferica di codimensione uno e G_n è il nucleo Gaussiano su H_n. Introduciamo inoltre la misura ρ_n su X definita da

$$\rho_n(A) = \int_{\hat{H}_n} \theta^n(A_y)\, d\gamma^\perp(y),$$

dove $A_y = \{x \in H_n : \ (x, y) \in X\}$ e $\gamma^\perp$ è la misura immagine di γ tramite la mappa $\pi_n^\perp$. Dato che la successione di misure ρ_n così costruite risulta monotona, passando all'estremo superiore, otteniamo una misura ρ di codimensione uno, che chiameremo misura di Gauss-Hausdorff di codimensione associata al sistema ortonormale $\{h_i\}$.

Per ogni insieme di Borel $A \subset X$, definiamo $\partial_*^n A$ come l'insieme dei punti x tali che $\pi_n(x)$ appartiene a $\partial_*(A_y)$, dove $y = \pi_n^\perp(x)$, e $\partial_* A_y$ come la frontiera essenziale $\partial_* A$ definita nel caso finito-dimensionale. La frontiera essenziale nel caso infinito-dimensionale sarà l'insieme dei punti x che appartengono alla successione di insiemi $\{\partial_*^n A\}$ definitivamente.

Infine daremo una versione del Teorema di Struttura dovuta a M.Hino (v. [6]): per ogni insieme di perimetro finito A si ha $|D_\gamma \chi_A| = \rho \llcorner \partial_* A$, dove ρ è la misura di Gauss-Hausdorff. In particolare, se σ è la decomposizione polare per $D_\gamma \chi_A$ allora si ha

$$\int_A (\partial_h^* \phi) d\gamma = -\int_{\partial_* A} \phi [h, \sigma]_H d\rho,$$

dove ϕ è una funzione sufficientemente regolare. Il risultato è indipendente dalla scelta del sistema ortonormale $\{h_i\}$, sebbene nè ρ nè $\partial_* A$ lo siano. A differenza del caso finito dimensionale non è noto se la frontiera essenziale abbia, in qualche senso, una struttura differenziale e se sia possibile interpretare ν come campo normale su $\partial_* A$.

Ovviamente, dato che il Lemma di ricoprimento di Besicovich-Vitali non vale in spazi di Banach infinito dimensionali, non è possibile estendere direttamente il Teorema di Struttura. L'idea fondamentale della dimostrazione consiste nel ridursi al caso finito dimensionale lavorando sulle sezioni.

1

DIMENSIONE FINITA

1.1 DISTRIBUZIONI

Cominciamo questa sezione introducendo alcune notazioni. Il termine multi-indice denota la n-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dove gli α_i sono interi non-negativi. L'ordine di α è definito da $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Associamo ad ogni α l'operatore differenziale definito da

$$D^\alpha = \Big(\frac{\partial}{\partial_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial_n}\Big)^{\alpha_n}.$$

L'ordine del operatore differenziale coincide con l'ordine del multi-indice. Il supporto della funzione $f : X \to \mathbb{R}$, dove X è uno spazio topologico, è $\operatorname{spt}(f) := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Denotiamo con $C^n(\Omega)$ lo spazio delle funzioni a valori reali in Ω differenziabili n volte con continuità. $C^n(\Omega)$ sarà dotato della topologia indotta dalla norma

$$\|f\|_n = \sup\{|D^\alpha f(x)| : x \in \Omega,\ |\alpha| \leqslant n\}.$$

In maniera analoga, lo spazio $C^\infty(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni che ammettono derivate continue di ogni ordine. Denotiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni in $C^\infty(\Omega)$ che hanno supporto compatto in Ω.

Definizione 1.1. Diremo che una successione $(\varphi_k) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge a φ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se valgono le seguenti:

- esiste K compatto tale che $\operatorname{spt}(\varphi_k), \operatorname{spt}(\varphi) \subset K$;
- $\|\varphi - \varphi_k\|_n \to 0$ per ogni $n \geqslant 0$.

Inoltre, diremo che $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ è continua se per ogni $\varphi_k \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ vale $\Lambda(\varphi_k) \to \Lambda(\varphi)$.

Si può costruire su $\mathcal{D}(\Omega)$ una topologia tale che il concetto di convergenza e di continuità appena introdotti sia equivalenti a quello indotto dalla topologia (v. [10, 39]). Questa topologia è unica se consideriamo, anche net, i.e. famiglie φ_i indicizzate da un insieme filtrante.

Definizione 1.2. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Un funzionale lineare e continuo Λ è una distribuzione in Ω. Lo spazio delle distribuzioni viene denotato con $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Teorema 1.3. *Sia Λ un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$. Le seguenti sono equivalenti*

(i). $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$

(ii). Per ogni insieme compatto K esistono un intero non-negativo N e una costante $C < \infty$ tale che
$$|\Lambda(\varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_N \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K. \tag{1.1.1}$$

Se il numero naturale N è indipendente da K diremo che la distribuzione Λ ha ordine N.

Dimostrazione. (ii)⇒(i) Sia $\varphi_k \to 0$ in $\mathcal{D}_K$. In particolare $\|\varphi_k\|_N \to 0$, quindi $\Lambda(\phi_k) \to 0$.

(i)⇒(ii) Supponiamo che esista un compatto K tale che per ogni n esista una $\varphi_n \in \mathcal{D}_K$ tale che
$$\Lambda(\varphi_n)| > n\|\varphi_n\|_n. \tag{1.1.2}$$

Le funzioni ψ_n definite come
$$\psi_n := \frac{\varphi_n}{n\|\varphi_n\|}$$
convergono a zero in $\mathcal{D}_K$. Utilizzando (1.1.2) e la definizione di ψ_n si ottiene $|\Lambda(\psi_n)| > 1$, che contraddice la (i). □

Proposizione 1.4. *Siano $\Lambda_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tali che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha*
$$\lim_{i\to\infty} \Lambda_i(\varphi) = \Lambda(\varphi).$$
Allora $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Dimostrazione. Per come è stato definito, Λ è lineare. Vogliamo quindi dimostrare la continuità in $\mathcal{D}(\Omega)$. Osserviamo che la continuità in un punto implica la continuità globale per una funzione lineare. Fissiamo un insieme compatto $K \subset \Omega$. Su $\mathcal{D}_K$ consideriamo la distanza
$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}(\|f-g\|_i \wedge 1),$$
dove $a \wedge b = \min\{a,b\}$. Con notazioni si dimostra che $f_n \to f$ in $\mathcal{D}_K$ se solo se $d(f_n, f) \to 0$. Inoltre questa distanza rende lo spazio $\mathcal{D}_K$ uno spazio metrico completo. Le funzioni Λ_i sono dei funzionali continui su $\mathcal{D}_K$ e quindi sono continui anche sullo spazio $(\mathcal{D}_K, d)$. Per il Teorema di Baire i punti di discontinuità di Λ sono un insieme di prima categoria, e dato che uno spazio metrico completo è di seconda categoria esiste almeno un punto di continuità per Λ. Quindi abbiamo dimostrato che per ogni K insieme compatto, $\Lambda|_{\mathcal{D}_K} : \mathcal{D}_K \to \mathbb{R}$ è un funzionale continuo. Sia (φ_h) una successione in $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\varphi_h \to \varphi$. Allora esiste un compatto K tale che $\mathrm{spt}(\varphi_h), \mathrm{spt}(\varphi) \subset K$. Per quanto dimostrato prima si ha $\Lambda(\varphi_h) \to \Lambda(\varphi)$.

□

Data una $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, consideriamo il funzionale lineare Λ_f definito dalla formula
$$\Lambda_f(\varphi) = \int f\varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si può verificare facilmente che Λ_f è una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Inoltre, supponiamo che $h \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sia tale che
$$\Lambda_f(\varphi) = \int h\,\varphi\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

allora $f = h$ $\mathcal{L}^n$-q.o. in Ω. Per questo motivo si identifica la distribuzione Λ_f con la funzione f. In maniera analoga se μ è una misura di Borel (i.e. una misura definita sulla σ-algebra di Borel), allora μ è determinata univocamente dal valore del funzionale

$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int \varphi \, d\mu(x) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Anche in questo caso identificheremo la distribuzione Λ_μ con la misura μ.

1.1.1 *Derivata di una distribuzione*

Per motivare la definizione della derivata di una distribuzione consideriamo prima di tutto una funzione $u \in C^1(\Omega)$. Per la formula di integrazione per parti si ha

$$\int_\Omega D_i u(x)\varphi(x) = -\int_\Omega u(x) D_i u(x) \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Questa formula caratterizza la derivata di u.

Definizione 1.5. Dato un multi-indice α, definiamo l'operatore $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ tramite la formula

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha(\varphi)).$$

Dato che $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ è una mappa continua, $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, inoltre $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ è una mappa continua e inoltre D^α, D^β commutano in $\mathcal{D}'(\Omega)$ i.e.

$$D^\alpha D^\beta = D^\beta D^\alpha = D^{\alpha+\beta}.$$

Questa nozione di derivabilità estende la definizione classica: infatti per la formula di integrazione per parti le due nozioni coincidono su $C^1(\Omega)$. Notiamo inoltre che una distribuzione al contrario di una funzione è sempre derivabile. Infatti, le distribuzioni sono usate per risolvere le difficoltà tecniche del Calcolo dovute alla non differenziabilità.

Proposizione 1.6. *Sia Λ una distribuzione di ordine h. Allora vale la seguente formula di integrazione per parti:*

$$D_i \Lambda(\varphi) = -\Lambda(D_i \varphi) \qquad \forall \varphi \in C_c^{h+1}(\Omega). \tag{1.1.3}$$

Dimostrazione. Denotiamo con K il supporto di φ. É noto che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $C_c^{h+1}(\Omega)$. Utilizzando la parte (ii) del Teorema 1.3, i funzionali Λ e $D_i\Lambda$ possono essere estesi in maniera continua a $C_c^{h+1}(\Omega)$. $\square$

Definizione 1.7. Sia $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia $\omega \subset \Omega$ un insieme aperto. Diremo che Λ si annulla in ω se $\Lambda(\varphi) = 0$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$. Sia W l'unione di tutti gli insiemi aperti ω in cui Λ si annulla. Il suo complementare in Ω viene detto supporto di Λ e viene denotato con $\operatorname{spt}(\Lambda)$.

Proposizione 1.8. *Sia W l'unione di tutti gli insiemi aperti ω dove Λ si annulla. Allora Λ si annulla in W.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ una funzione e denotiamo con K il suo supporto. Per ogni punto $x \in K$ scegliamo un aperto ω_x tale che la distribuzione Λ si annulla su ω_x. Utilizzando la compattezza di K, da questo ricoprimento possiamo estrarre un sotto ricoprimento finito $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Utilizzando le partizioni dell'unità possiamo trovare delle funzioni $\psi_1, \ldots, \psi_n$ tali che

- $\mathrm{spt}(\psi_i) \subset \omega_i$
- $\sum \psi_i = 1$ in K.

Se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, allora si ha $\varphi = \sum \varphi\psi_i$. Notiamo inoltre che $\varphi\psi_i$ ha supporto in $\mathcal{D}(\omega_i)$. Quindi per la linearità di Λ si ha

$$\Lambda(\varphi) = \Lambda(\sum \varphi\psi_i) = \sum \Lambda(\varphi\psi_i) = 0.$$

□

Proposizione 1.9 (Proprietà del supporto)**.** *Sia $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Allora valgono le seguenti:*

(i). Se spt$(\varphi) \cap$ spt$(\Lambda) = \emptyset$, allora $\Lambda(\varphi) = 0$;

(ii). Se spt$(\Lambda) = \emptyset$, allora $\Lambda = 0$;

(iii). Se spt(Λ) è un sottoinsieme compatto di Ω, allora Λ ha ordine finito. Inoltre esiste una costante C (indipendente da K) tale che vale (1.1.1)*.*

Dimostrazione. Le parti (i), (ii) sono conseguenza diretta della definizione.
(iii) Denotiamo con $K := \mathrm{spt}(\Lambda)$. Sia V tale che $K \subset V \subset\subset \Omega$. Allora esiste una funzione χ tale che $\chi_{|_K} = 1$ e $\mathrm{spt}(\chi) \subset V$. Denotiamo con $K_1 := \mathrm{spt}(\chi)$. Dato che $\mathrm{spt}(\varphi - \chi\varphi) \cap K = \emptyset$ si ha $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\chi\varphi)$. Per (ii) nel Teorema 1.3 si ha che esistono C_1, n tali che $\Lambda(\chi\varphi) \leqslant C\|\chi\varphi\|_n$. Utilizzando la formula di Leibniz si mostra che esiste una costante C_2 tale che $\|\chi\varphi\|_n \leqslant C_2\|\varphi\|_n$. Quindi si ha

$$\Lambda(\varphi) \leqslant C_1 \cdot C_2\|\varphi\|_n.$$

Prendendo $C = C_1C_2$ si conclude. □

1.1.2 *Operazioni sulle distribuzioni*

Siano $\omega \subset \Omega$ due insiemi aperti e sia $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Definiamo la restrizione come

$$(\Lambda|_\omega)(\varphi) := \Lambda(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Sia u un a funzione su $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Definiamo l'operatore di traslazione τ_x come

$$(\tau_x u)(y) = u(y - x).$$

Siano $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che $u(y)v(x-y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per $\mathcal{L}^n$-q.o. x. Definiamo la loro convoluzione come

$$u * v(x) = \int u(y)v(x-y)dy,$$

La convoluzione può essere riscritta anche come

$$u * v(x) = \int u(y)\tau_x \check{v}(y)dy,$$

dove $\check{v}(x) = v(-x)$. È facile vedere che $\mathrm{spt}(u * v) \subset \mathrm{spt}(u) + \mathrm{spt}(v)$.
Siano $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Per analogia con quanto scritto sopra, definiamo $\Lambda * \varphi$ come

$$\Lambda * \varphi(x) = \Lambda(\tau_x \check{\varphi}).$$

Si dimostra inoltre facilmente che $\mathrm{spt}(\Lambda * \varphi) \subset \mathrm{spt}(\Lambda) + \mathrm{spt}(\varphi)$.
Per $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definiamo $\psi\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ come

$$(\psi\Lambda)(\varphi) = \Lambda(\psi\varphi).$$

Proposizione 1.10.
Siano $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C^\infty$, allora

(i). $\tau_x(\Lambda * \varphi) = (\tau_x\Lambda) * \varphi = \Lambda * (\tau_x\varphi)$;

(ii). $\Lambda * \varphi \in C^\infty$ e $D^\alpha(\Lambda * \varphi) = (D^\alpha\Lambda) * \varphi = \Lambda * (D^\alpha\varphi)$.

Inoltre se $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, allora

(iii). $\Lambda * \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $D^\alpha(\Lambda * \varphi) = (D^\alpha\Lambda) * \varphi = \Lambda * (D^\alpha\varphi)$;

(iv). $(\Lambda * \varphi) * \psi = \Lambda * (\varphi * \psi)$.

Definizione 1.11 (Mollificatori)**.** Una successione (ρ_i) in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è detta di mollificatori se per ogni $n \in \mathbb{N}$ valgono le seguenti

(*i*). $\mathrm{spt}(\rho_i) \subset B(0, 1/n)$;

(*ii*). $\rho_i \geqslant 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_i(x)\,dx = 1$.

Si verifica facilmente che la successione di funzioni $\phi_j = j^n\phi(jx)$, dove $\phi \in \mathcal{D}(\Omega), \phi \geqslant 0, \mathrm{spt}(\phi) \subset B(0,1)$ e $\int \phi\,dx = 1$ è una successione di mollificatori.

Proposizione 1.12. *Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e sia (ψ_j) una successione di mollificatori. Allora si ha*

(i). $\lim_{j\to\infty} \varphi * \psi_j = \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

(ii). $\lim_{j\to\infty} \Lambda * \psi_j = \Lambda$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. (i) Sia f una funzione continua. Non è difficile dimostrare che $f * \psi_j \to \psi$ uniformemente su sottoinsiemi compatti di Ω. Applicando questo a $D^\alpha\varphi$ si ottiene che $D^\alpha(\varphi * \psi_j) \to D^\alpha\varphi$ uniformemente. Dato che $\mathrm{spt}(\varphi * \psi_j) \subset \mathrm{spt}(\varphi) + \mathrm{spt}(\psi_j)$, le $\phi * \psi_j$ hanno tutte supporto contenuto nel medesimo compatto.
Il punto (ii) segue dal punto (i) poiché

$$\Lambda(\check{\varphi}) = (\Lambda * \varphi)(0) = \lim_{j\to\infty}(\Lambda * (\varphi * \psi_j))(0) = \lim_{j\to\infty}((\Lambda * \psi_j) * \varphi)(0) = \lim_{j\to\infty}(\Lambda * \psi_j)(\check{\varphi}),$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato il punto (iv) della Proposizione 1.10. □

Teorema 1.13. *Sia Ω un insieme aperto e sia $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora esiste una successione $\{\Lambda_j\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\Lambda_j \to \Lambda$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $\{K_j\}$ una successione crescente di compatti che invade Ω tale che $\mathrm{dist}(K, \partial\Omega) > 1/j$ e $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$. Per ogni K_j scegliamo $\chi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\chi_j = 1$ in K_{j-1} e $\mathrm{spt}(\chi_j) \subset K_j$. Non è difficile vedere che $\chi_j\Lambda \to \Lambda$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Per la Proposizione 1.12, la successione

$$\Lambda_j := (\chi_j\Lambda) * \phi_j,$$

dove ϕ_j è una successione di mollificatori, converge a Λ. □

Definizione 1.14. Sia $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia ρ_ε una funzione avente supporto in $B(0, \varepsilon)$. Definiamo $\Lambda * \rho_\varepsilon$ la distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega^\varepsilon)$ come

$$(\Lambda * \rho_\varepsilon)(\varphi) = \Lambda(\check{\rho}_\varepsilon * \varphi),$$

dove $\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega : \ dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$

Se Λ può essere rappresentato da una misura μ, si ha

$$\Lambda * \rho_\varepsilon(x) = \int_{\Omega^\varepsilon} \rho_\varepsilon(x - y)\, d\mu(y).$$

1.2 FUNZIONI BV

Definizione 1.15. Sia $u \in L^1(\Omega)$. Diremo che u è una funzione a variazione limitata in Ω se la derivata distribuzionale di u si può rappresentare con una misura di Radon finita su Ω i.e.

$$\int_\Omega u(x) D_i\varphi(x)\, dx = -\int_\Omega \varphi(x)\, dD_i u(x) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ e } \forall i = 1, \dots, n. \tag{1.2.1}$$

Indicheremo con Du la misura di Radon a valori in $\mathbb{R}^n$ definita da $Du = (D_1u, \dots, D_nu)$. Lo spazio vettoriale delle funzioni a variazione limitata in Ω sarà denotato con $BV(\Omega)$. Inoltre indicheremo con $BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni u, tali che per ogni aperto $A \subset\subset \Omega$, $u \in BV(A)$.

Utilizzando la Proposizione 1.6 si ottiene che la (1.2.1) è valida per ogni $\varphi \in C^1_c(\Omega)$.

Proposizione 1.16 (Proprietà di Du)**.** *Sia $u \in BV(\Omega)$. Allora si ha*

(i). *Se $Du = 0$, allora u è equivalente ad una costante in ogni componente connessa di Ω.*

(ii). *Per ogni funzione Lipschitziana $\psi : \Omega \to \mathbb{R}$, la funzione $u\psi$ ha variazione limitata in $BV(\Omega)$ ed inoltre si ha*

$$D(\psi u) = \psi\, Du + (\nabla\psi \cdot u).$$

(iii). *Sia ρ_ε una successione di mollificatori e $\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Allora si ha*

$$\nabla(u * \rho_\varepsilon) = Du * \rho_\varepsilon \qquad \text{in } \Omega^\varepsilon.$$

Dimostrazione. (i) segue da (iii). Infatti, sia ρ_ε una famiglia di mollificatori. Le distribuzioni $u * \rho_\varepsilon$ sono rapresentabili tramite funzioni in $C^\infty(\Omega^\varepsilon)$. Per il punto (iii)

$$\nabla(u * \rho_\varepsilon) = Du * \rho_\varepsilon = 0.$$

La tesi è ovvia nel caso in cui u è una funzione di classe C^∞. Dato che $u * \rho_\varepsilon \to u$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si conclude.
(ii) Per il Teorema di Rademacher, ψ è $\mathcal{L}^n$-q.o. differenziabile e quindi $D\psi = \nabla\psi\mathcal{L}^n$ e quindi vale

$$\operatorname{div}(\varphi\psi) = \operatorname{div}(\varphi)\psi + \varphi \cdot \nabla\psi \qquad \forall\psi \in C^1_c(\Omega),\ \mathcal{L}^n\text{-q.o.}x.$$

Moltiplicando per u ed integrando si ha

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\varphi\psi)u\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\varphi)\psi u\,dx + \int_\Omega \varphi \cdot \nabla\psi u\,dx.$$

Utilizzando la definizione di distribuzione si ha

$$-\int_\Omega \varphi\,\psi\,dDu = -\int_\Omega \varphi\,dD(\psi u) + \int_\Omega \varphi \cdot \nabla\psi u\,dx,$$

che equivale alla tesi.
(iii) Per la Proposizione 1.10, si ha $\nabla(u * \rho_\varepsilon) = Du * \rho_\varepsilon$ nel senso delle distribuzioni. Dato che Du è una misura la stessa uguaglianza si ha nell'ambito delle misure. □

Definizione 1.17. Sia u una funzione in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. La variazione, $V(u,\Omega)$, di u in Ω è definita da

$$V(u,\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega u\operatorname{div}(\varphi)\,dx : \varphi \in [C^1_c(\Omega)]^n,\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\}.$$

Osservazione 1.18. Supponiamo che $u \in C^1(\Omega)$. Utilizzando la formula di integrazione per parti otteniamo

$$\int_\Omega u\operatorname{div}\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Quindi prendendo l'estremo superiore al variare di φ si ottiene

$$V(u,\Omega) = \int_\Omega |\nabla u(x)|\,dx.$$

Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ la variazione, $V(u,A)$, può essere definita in maniera naturale in ogni insieme aperto $A \subset \Omega$ come

$$V(u,A) = \sup\left\{\int u\operatorname{div}(\varphi)\,dx : \varphi \in [C^1_c(A)]^n,\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\}.$$

Proposizione 1.19 (Proprietà della variazione)**.** *Valgono le seguenti proprietà*

(i). La mappa $u \to V(u,\Omega) \in [0,\infty]$, come funzione sullo spazio $L^1_{loc}(\Omega)$ è semicontinua inferiormente.

(ii). La funzione d'insieme $A \to V(u,A)$ è la restrizione di una misura Boreliana sugli insiemi aperti di Ω.

(iii). La mappa $u \to V(u,\Omega)$ è locale i.e. se $\chi_A u = \chi_A v$ per $\mathcal{L}^n$-q.o. x, allora $V(u,A) = V(v,A)$.

Dimostrazione. (i) La mappa
$$u \to \int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi(x)\, dx$$
è una mappa continua secondo la topologia $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dato che l'estremo superiore di mappe continue è semicontinuo inferiormente segue l'affermazione.
(ii) La variazione $V(u,\Omega)$, come funzione d'insieme definita sugli insiemi aperti, è monotona. Per il Teorema di De Giorgi–Letta è sufficiente dimostrare:

(a) Se A_1, A_2 sono insiemi aperti, allora $V(u, A_1 \cup A_2) \leqslant V(u,A_1) + V(u,A_2)$;

(b) Se $A_1.A_2$ sono insiemi aperti tali che $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, allora $V(u, A_1 \cup A_2) \geqslant V(u,A_1) + V(u,A_2)$;

(c) $V(u,A) = \sup\{V(u,B), B \subset\subset A,\ B \text{ aperto}\}$.

(a) Sia $\varphi \in [C^1_c(A_1 \cup A_2)]^n$ tale che $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ e tale che
$$\int_{A_1 \cup A_2} u \,\mathrm{div}(\varphi) dx \geqslant V(u, A_1 \cup A_2) - \varepsilon.$$
Denotiamo con $K = \mathrm{spt}(\varphi)$. Dato che A_1, A_2 sono un ricoprimento di K, utilizzando le partizioni dell'unità esistono ψ_1, ψ_2 con supporti in A_1 e A_2 rispettivamente e tali che $\psi_1(x) + \psi_2(x) = 1$ per ogni $x \in K$. Osserviamo inoltre che $\psi_1\varphi$ (risp. $\psi_2\varphi$) è una funzione ammessa nella definizione di $V(u,A_1)$ (risp. $V(u,A_2)$), quindi si ha
$$V(u, A_1 \cup A_2) - \varepsilon \leqslant \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\psi_1\varphi)\, dx + \int_\Omega u \,\mathrm{div}(\psi_1\varphi)\, dx \leqslant V(u,A_1) + V(u,A_2).$$
(b) Siano $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\varphi_1 \in [C^1_c(A_1)]^n$ con $\|\varphi_1\|_\infty \leqslant 1$ e $\varphi_2 \in [C^1_c(A_2)]^n$ con $\|\varphi_2\|_\infty \leqslant 1$, allora $\varphi_1 + \varphi_2 \in [C^1_c(A_1 \cup A_2)]^n$ e $\|\varphi_1 + \varphi_2\|_\infty \leqslant 1$. Quindi passando all'estremo superiore al variare di φ_1, φ_2 si ottiene il punto (b).
(c) Sia $\varphi \in [C^1_c(A)]^n$ tale che $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ e
$$\int_A u \,\mathrm{div}(\varphi) dx \geqslant V(u,A) - \varepsilon.$$
Denotiamo con $K = \mathrm{spt}(\varphi)$. Osserviamo che scegliendo δ tale che $K_\delta \subset A$ ed utilizzando la monotonia di $V(u,\cdot)$ si ha $\varphi \in [C^1_c(K_\delta)]^n$ e
$$V(u,A) - \varepsilon \leqslant V(u,K_\delta) \leqslant V(u,A).$$
Per l'arbitrarietà di ε si ottiene la tesi.

□

Proposizione 1.20. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $u \in L^1(\Omega)$. Allora $u \in BV(\Omega)$ se solo se $V(u,\Omega) < \infty$. Inoltre, $V(u,\Omega)$ è uguale a $|Du|(\Omega)$ per ogni $u \in BV(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, allora per la formula di integrazione per parti si ha

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi)\, dx = -\sum_{i=1}^n \int \varphi_i \, dD_i u.$$

Quindi prendendo l'estremo superiore come nella definizione di $V(u,\Omega)$ si ottiene la maggiorazione

$$V(u,\Omega) \leqslant |Du|(\Omega),$$

la quale è finita poiché $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

Supponiamo ora $V(u,\Omega) < \infty$. Denotiamo con L la funzione lineare su $[C_c^1(\Omega)]^n$ definita come

$$L(\varphi) = \int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi)\, dx$$

Utilizzando la linearità di L è facile mostrare che

$$|L(\varphi)| = V(u,\Omega)\|\varphi\|_\infty \qquad \forall \varphi \in [C_c^1(\Omega)]^n.$$

Per la densità di $C_c^1(\Omega)$ in $C_c^0(\Omega)$, L può essere esteso a tutto $[C_c^0(\Omega)]^n$. Quindi per il Teorema di Riesz esiste una misura di Radon a valori in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \varphi_i \mu_i \qquad \forall \varphi \in [C_c^0(\Omega)]^n$$

e tale che $\|L\| = |\mu|(\Omega)$. Infine, per definizione di derivata distribuzionale si ha $Du = -\mu$. □

Le variazione è uno strumento molto utile per stabilire se una funzione u ha variazione limitata. Infatti se troviamo una successione di funzioni $u_h \to u$ in $L^1(\Omega)$ con variazione equilimitata, la semicontinuità inferiore garantisce che $u \in BV(\Omega)$.

Proposizione 1.21. *Siano $u \in BV(\Omega)$ e $U \subset\subset \Omega$ tale che $|Du|(\partial U) = 0$. Allora*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} |Du_\varepsilon|(U) = |Du|(U),$$

dove $u_\varepsilon = u * \rho_\epsilon$ con ρ_ϵ una successione di mollificatori.

Dimostrazione. Dato che $u_\varepsilon \to u$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, utilizzando la semicontinuità inferiore della variazione si ottiene che $\liminf_\varepsilon |Du_\varepsilon|(U) \geqslant |Du|(U)$.

Se ε tale che $U_\varepsilon \subset \Omega$, allora si ah

$$\begin{aligned} |Du_\varepsilon|(U) &= \int_U d|Du_\varepsilon| = \int_U \left| \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\, dDu(y) \right| dx \\ &\leqslant \int_U \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\, d|Du|(y)\, dx \leqslant |Du|(U_\varepsilon), \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

dove nell'ultima diseguaglianza abbiamo usato il Teorema di Fubini ed il fatto che $\chi_U * \rho_\varepsilon \leqslant \chi_{U_\varepsilon}$. Utilizzando la diseguaglianza (1.2.2) si ottiene

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} |Du_\varepsilon|(U) \leqslant \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} |Du|(U_\varepsilon) = |Du|(\overline{U}) = |Du|(U),$$

dove nell'ultima diseguaglianza abbiamo usato l'ipotesi $Du(\partial U) = 0$. □

Osservazione 1.22. Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^n$ si può dimostrare che $\lim_\varepsilon |Du_\varepsilon|(\mathbb{R}^n) = |Du|(\mathbb{R}^n)$, dove $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$. Per verificare quest'ultima affermazione, basta solo dimostrare $\limsup_\varepsilon |Du_\varepsilon|(\mathbb{R}^n) \leqslant |Du|(\mathbb{R}^n)$. Osserviamo che per la (1.2.2) si ha

$$|Du_\varepsilon|(\mathbb{R}^n) \leqslant (|Du| * \rho)(\mathbb{R}^n) = |Du|(\mathbb{R}^n),$$

e quindi si ottiene quanto voluto.

Teorema 1.23. *Sia $u \in L^1(\Omega)$. Allora $u \in BV(\Omega)$ se solo se esistono $(u_h) \subset C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tale che $u_h \to u$ in $L^1(\Omega)$ e*

$$L = \lim_{h\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_h|\, dx < \infty. \tag{1.2.3}$$

Inoltre, il minimo valore di L in (1.2.3) *è $|Du|(\Omega)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $u_h \to u$ in $L^1(\Omega)$ e tale che valga la (1.2.3). Utilizzando l'Osservazione 1.18 e la semicontinuità di $V(\cdot, \Omega)$ si ottiene

$$V(u,\Omega) \leqslant L = \liminf_{h\to\infty} V(u_h, \Omega) < \infty.$$

Infine per la Proposizione 1.20, si ha $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Quest'ultima diseguaglianza dimostra anche che il minimo valore di L deve essere maggiore o uguale a $|Du|(\Omega) = V(u, \Omega)$.

Supponiamo ora che $u \in BV(\Omega)$ costruiamo per ogni $\delta > 0$ una funzione $v_\delta \in C^\infty(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega |u - v_\delta| \leqslant \delta \quad \text{e} \quad \int |\nabla v_\delta| dx \leqslant |Du|(\Omega) + \delta.$$

L'esistenza di una tale funzione ci permette di concludere, infatti, $v_\delta \to u$ in $L^1(\Omega)$ ed inoltre $\liminf_\delta V(v_\delta, \Omega) = |Du|(\Omega)$.

Innanzitutto, notiamo che è possibile decomporre Ω in una famiglia numerabile di insiemi $\{\Omega_h\}$ a chiusura compatta in Ω tale che ogni punto $x \in \Omega$ appartiene ad un numero finito di insiemi Ω_h. Una possibile costruzione e la seguente:

$$\Omega_{k,1} = \{x \in \Omega :\ k - 1 < g(x) \leqslant k + 1,\ f(x) > 1/2\}$$

e

$$\Omega_{k,p} = \{x \in \Omega :\ k - 1 < g(x) \leqslant k + 1,\ 1/(p-1) \geqslant f(x) > 1/(p+1)\},$$

dove $k \geqslant 1, p > 1$ sono interi, $f(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ e $g(x) = \mathrm{dist}(x, 0)$. Non è difficile dimostrare che $x \in \Omega_{k,p}$ solo per al più quattro insiemi $\Omega_{k,p}$.

Sia $\{\psi_h\}$ una partizione dell'unità relativa alla partizione Ω_h i.e. ψ_h sono delle funzioni positive in C_c^∞ tali che $\sum_h \psi_h = 1$ in Ω e $\mathrm{spt}(\psi_h) \subset \Omega_h$. Per ogni intero h scegliamo un $\varepsilon_h > 0$ tale che $\mathrm{spt}((u\psi_h) * \rho_{\varepsilon_h}) \subset \Omega_h$ ed inoltre

$$\int_\Omega [|(u\psi) * \rho_{\varepsilon_h} - u\psi_h| + |(u \cdot \nabla\psi_h) * \rho_{\varepsilon_h} - u \cdot \nabla\psi_h|]\; dx \leqslant 2^{-k}\delta. \tag{1.2.4}$$

Questo è sempre possibile dato che i singoli termini della somma in (1.2.4) tendono a zero per $\varepsilon_h \to 0$. La funzione $v_\delta(x) := \sum_h (u\psi_h) * \rho_{\varepsilon_h}$ è di classe C^∞ poiché localmente, nella somma contribuiscono solo un numero finito di funzioni $(u\psi_h) * \rho_{\varepsilon_h}$ e ciascuna di esse è

regolare.
Dato che $\sum_h \psi_h = 1$ in Ω si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} \nabla \psi_h = \nabla \Big(\sum_{h=0}^{\infty} \psi_h \Big) = 0.$$

Per la nostra scelta di ε_h si ha

$$\int_\Omega |u - v_\delta| \, dx \leqslant \sum_{h=0}^{\infty} \int_{\Omega_h} |(u\psi_h) * \rho_{\varepsilon_h} - u\psi_h| \, dx \leqslant \delta \tag{1.2.5}$$

e

$$\begin{aligned} \int_\Omega |(\psi_h Du) * \rho_{\varepsilon_h}| \, dx &\leqslant \int_\Omega \int_\Omega \psi_h(x) \rho_{\varepsilon_h}(x-y) \, d|Du|(y) \, dx \leqslant |Du|(\mathrm{spt}(\psi_{\varepsilon_h})_{\varepsilon_h}) \\ &\leqslant |Du|(\Omega_h), \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

dove $\mathrm{spt}(\psi_{\varepsilon_h})_{\varepsilon_h}$ è l'ε_h intorno di $\mathrm{spt}(\psi_{\varepsilon_h})$. Utilizzando il punto (ii) nella Proposizione 1.16 e (1.2.5) si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla v_\delta &= \sum_{h=1}^{\infty} \nabla \Big((u\psi_h) * \rho_{\varepsilon_h} \Big) = \sum_{h=1}^{\infty} (D(u\psi_h)) * \rho_{\varepsilon_h} \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} (\psi_h Du) * \rho_{\varepsilon_h} + \sum_{h=1}^{\infty} (u \cdot \nabla \psi_h) * \rho_{\varepsilon_h} \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} (\psi_h Du) * \rho_{\varepsilon_h} + \sum_{h=1}^{\infty} (u \cdot \nabla \psi_h) * \rho_{\varepsilon_h} - u \cdot \nabla \psi_h. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

$|Dv_\delta|(\Omega)$ si può stimare come

$$\begin{aligned} |Dv_\delta|(\Omega) &\leqslant \sum_{h=1}^{\infty} \int_\Omega |(\psi_h Du) * \rho_{\varepsilon_h}| \, dx + \sum_{h=1}^{\infty} \int_\Omega |(u \cdot \nabla \psi_h) * \rho_{\varepsilon_h} - u \cdot \nabla \psi_h| \, dx \\ &\leqslant \sum_{h=1}^{\infty} \int_\Omega |(\psi_h Du) * \rho_{\varepsilon_h}| \, dx + \delta \leqslant \sum_{h=1}^{\infty} \int_\Omega \psi_h \, d|Du| + \delta = |Du|(\Omega) + \delta. \end{aligned}$$

La funzione v_δ soddisfa quanto richiesto, il che conclude la dimostrazione. □

Vogliamo dotare $\mathrm{BV}(\Omega)$ di una topologia. Una scelta naturale potrebbe essere la topologia indotta dalla norma

$$\|u\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega).$$

Anche se lo spazio $\mathrm{BV}(\Omega)$ dotato di questa topologia è uno spazio di Banach, tuttavia risulta non separabile, la topologia indotta è troppo forte per la maggior parte delle applicazioni e lo spazio delle funzioni di classe C^1 non è denso. Infatti se μ, ν sono due misure tra loro singolari si dimostra che $|\mu + \nu| = |\mu| + |\nu|$. Per dimostrare la non separabilità basta trovare $\mathcal{A} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$, più che numerabile, tale che per ogni $u, v \in \mathcal{A}$, si ha $\|u - v\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \geqslant \delta$, con $\delta > 0$. Una tale famiglia di funzioni sono ad esempio $\chi_{B(x_0,\rho)}$ al variare di $\rho \in (r, 2r)$, con $x_0 \in \Omega$ tale che $B(x_0, 2r) \subset \Omega$. Si vede che le misure $D\chi_{B(0,\rho)}$ sono mutuamente singolari e $|D\chi_{B(0,\rho)}|(\Omega) > \delta$. Inoltre, dato che $D\chi_{B(0,\rho)}$ è singolare rispetto alla misura di Lebesgue e le $|Dv|$ con $v \in C^1$ sono assolutamente continue rispetto a Lebesgue, segue che non è possibile approssimare $\chi_{B(0,\rho)}$ con funzioni di classe C^1. Quindi sarà necessario dotare $\mathrm{BV}(\Omega)$ con una topologia meno fine di quella indotta dalla norma $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$. Un maniera naturale è imporre oltre alla topologia di L^1 la topologia delle misure per la derivata distribuzionale.

Diremo che un insieme $\mathcal{A} \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ è limitato in $\mathrm{BV}(\Omega)$ se è limitato secondo $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}(\Omega)}$.

Definizione 1.24. Siano $u_h, u \in BV(\Omega)$. Diremo che (u_h) converge debolmente* ad u in $\mathrm{BV}(\Omega)$ se $u_h \to u$ in $L^1(\Omega)$ ed inoltre la successione di misure (Du_h) converge debolmente* a Du in Ω i.e.

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \varphi \, dDu_h = \int_\Omega \varphi \, dDu \qquad \forall \varphi \in C_c^0(\Omega). \tag{1.2.8}$$

Nel caso in cui $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ la convergenza in (1.2.8) è sempre vera. Infatti utilizzando la formula di integrazione per parti e la convergenza in $L^1(\Omega)$ si ha

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega \varphi \, dDu_h = \lim_{h\to\infty} \int_\Omega \mathrm{div}\varphi \, u_h \, dx = \int_\Omega \mathrm{div}\varphi \, u \, dx = \int_\Omega \varphi \, dDu \, dx.$$

Proposizione 1.25. *Sia $(u_h) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ una successione. Allora (u_h) converge debolmente* ad u in $\mathrm{BV}(\Omega)$ se solo se (u_h) è limitata in $\mathrm{BV}(\Omega)$ e $u_h \to u$ in $L^1(\Omega)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che (u_h) sia limitata in $\mathrm{BV}(\Omega)$ ed inoltre $u_h \to u$ in $L^1(\Omega)$. Vogliamo mostrare che $Du_h \to Du$ debolmente* in Ω. Dato che $\sup_h |Du_h|(\Omega) < \infty$, $\{Du_h\}$ è relativamente compatto secondo la topologia debole* delle misure. Quindi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente. Per concludere basta dimostrare che ogni punto limite, $\mu = \lim_k Du_{h_k}$, coincide con Du.
Dato che $u_{h_k} \to u$ in $L^1(\Omega)$, passando al limite per $k \to \infty$ si ha

$$\int_\Omega \phi \, Du = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \mathrm{div}\phi \, u_{h_k} \, dx = -\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \phi \, dDu_{h_k} = \int_\Omega \phi \, d\mu \qquad \forall \phi \in C_c^1(\Omega).$$

Vogliamo ora dimostrare che (u_k) è limitato in $\mathrm{BV}(\Omega)$. Per fare ciò è sufficiente dimostrare che $\sup_h |Du_h|(\Omega) < \infty$. Per il Teorema di Riesz si ha che il duale di $[C_c(\mathbb{R}^n)]^n$ è lo spazio delle misure di Radon a valori in $\mathbb{R}^n$ e dato che Du_h è un insieme precompatto per ipotesi si ottiene che $\sup_h |Du_h|(\Omega) < \infty$. $\square$

Lemma 1.26. *Sia $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ e sia $K \subset \Omega$ un insieme compatto tale che $K_\varepsilon \subset \Omega$. Allora si ha*

$$\int_K |u * \rho_\varepsilon - u| \, dx \leqslant \varepsilon |Du|(\Omega). \tag{1.2.9}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 1.23 possiamo assumere senza perdita di generalità che $u \in C^1(\Omega)$. Utilizzando il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale si ottiene

$$|u(x-y) - u(x)| = |\int_0^1 \langle \nabla u(x-ty), y \rangle \, dt| \leqslant |y| \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| \, dt. \tag{1.2.10}$$

Utilizzando (1.2.10) ed il Teorema di Fubini si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_K |u * \rho_\varepsilon - u| \, dx &\leqslant \int_K \int_{B(0,\varepsilon)} |u(x-y) - u(x)| \rho_\varepsilon(y) \, dy \, dx \\
&\leqslant \int_0^1 \int_{B(0,\varepsilon)} |y| \left(\int_K |\nabla u(x-ty)| \, dx \right) dy \, dt \\
&\leqslant \int_0^1 \int_{B(0,\varepsilon)} \varepsilon \left(\int_{K_\varepsilon} |\nabla u(x)| \, dx \right) dy \, dt = \varepsilon |Du|(\Omega),
\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato che y varia in $B(0,\varepsilon)$. $\square$

Teorema 1.27. *Sia* $(u_h) \subset \mathrm{BV}_{loc}(\Omega)$ *una successione tale che*

$$\sup\left\{\int_A |u_h| + |Du_h|(A) : h \in \mathbb{N}\right\} < \infty \qquad \forall A \subset\subset \Omega \text{ aperto.}$$

Allora esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) *convergente ad* $u \in \mathrm{BV}_{loc}(\Omega)$ *in* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ un insieme aperto. Dimostriamo innanzitutto che esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente a $u \in L^1(\Omega')$. Siano $\delta = \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, $U \subset\subset \Omega$ il $\delta/2$ intorno aperto di Ω' e (ρ_ε) una successione di mollificatori con $\varepsilon \in (0, \delta/2)$. Le funzioni $u_{h,\varepsilon} := u_h * \rho_\varepsilon$ sono regolari in $\overline{\Omega'}$ ed inoltre si ha

$$\|u_{h,\varepsilon}\|_{C(\overline{U})} \leqslant \|u_h\|_{L^1(U)} \|\rho_\varepsilon\|_\infty, \qquad \|\nabla u_{h,\varepsilon}\| \leqslant \|u_h\|_{L^1(U)} \|\nabla \rho_\varepsilon\|_\infty.$$

Dato che per ipotesi le funzioni u_h sono limitate in $L^1(U)$, si ha che le $u_{h,\varepsilon}$ sono equilimitate ed equicontinue. Fissato ε, utilizzando il Teorema di Ascoli-Arzela, si può estrarre una sottosuccessione di $(u_{h,\varepsilon})$ convergente in $C(\overline{\Omega'})$. Applicando un procedimento diagonale è possibile trovare una sottosuccessione (u_{h_k}) tale che $(u_{h_k,\varepsilon})$ converga per ogni $\varepsilon = 1/p$ con $p > 2/\delta$ intero. Utilizzando il Lemma 1.26 si ottiene

$$\begin{aligned}
\limsup_{k,k'\to\infty} \int_{\Omega'} |u_{h_k} - u_{h_{k'}}|\, dx &\leqslant \limsup_{k,k'\to\infty} \int_{\Omega'} |u_{h_k,1/p} - u_{h_{k'},1/p}|\, dx \\
&\quad + \limsup_{k,k'\to\infty} \int_{\Omega'} |u_{h_k} - u_{h_{k'},1/p}|\, dx + \limsup_{k,k'\to\infty} \int_{\Omega'} |u_{h_k,1/p} - u_{h_{k'}}|\, dx \\
&\leqslant \frac{2}{p} \sup_{h\in\mathbb{N}} |Du_h|(\Omega).
\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

Per l'arbitrarietà di p si ha che la successione u_{h_k} è di Cauchy e quindi converge in $L^1(\Omega')$.

Siano $\Omega_n \subset\subset \Omega$ insiemi aperti tali che $\bigcup \Omega_n = \Omega$. Per ciascun Ω_n possiamo estrarre una successione convergente in $L^1(\Omega_n)$. Applicando un procedimento diagonale è possibile trovare una sottosuccessione convergente in $L^1(\Omega_n)$ per ogni n, e quindi convergente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Sia u il limite di una sottosuccessione convergente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dato che la variazione è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è facile vedere che per ogni $A \subset \Omega$ aperto si ha $V(u, A) < \infty$. $\square$

1.2.1 *Insiemi di Perimetro finito*

Definizione 1.28. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$ misurabile. Per ogni insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ il *perimetro* di E in Ω, $P(E,\Omega)$, è la variazione di χ_E in Ω i.e.

$$P(E,\Omega) = \sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi)\, dx : \varphi \in [C^1_c(\Omega)]^n,\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1\right\}.$$

Diremo che l'insieme E è un insieme di perimetro finito se $P(E,\Omega) < \infty$

Sia E un insieme di perimetro finito. Se $|E \cap \Omega| < \infty$, allora $\chi_E \in L^1(\Omega)$ e quindi utilizzando la Proposizione 1.20 si ottiene che $\chi_E \in \mathrm{BV}(\Omega)$ e $|Du|(\Omega) = P(E,\Omega)$. Supponiamo che E, Ω siano insiemi aperti e $P(E,\Omega) < \infty$, allora $\mathrm{spt}(D\chi_E) \subset \partial E \cap \Omega$. Per dimostrare questa affermazione basta trovare per ogni $x \notin \partial E$ un insieme aperto A tale che

$$\int \mathrm{div}(\varphi)\chi_E = 0 \qquad \forall \varphi \in [C_c^1(A)]^n. \tag{1.2.12}$$

Per fare ciò è sufficiente osservare che se $x \notin \partial E$, allora esiste un insieme aperto $A \subset \Omega$ tale che $x \in A$ dove $A \subset E$ oppure $A \subset \mathbb{R}^n \setminus E$ e quindi vale la (1.2.12).

Supponiamo inoltre che E sia un insieme aperto con frontiera regolare (basta C^1) in Ω, allora $D\chi_E = -\nu(x) \cdot \sigma$, dove σ è la misura superficiale su $\partial E \cap \Omega$ e ν è la normale interna. Infatti per il teorema della divergenza si ha

$$\int_E \mathrm{div}(g)\, dx = -\int_{\partial E} \langle \nu, g \rangle \, d\sigma \qquad \forall \varphi \in [C_c^1(\mathbb{R}^n)]^n,$$

e quindi per l'arbitrarietà di φ si ottiene quanto voluto. Come conseguenza si ottiene facilmente che $P(E,\Omega) = \sigma(\partial E \cap \Omega)$.

Utilizzando il Teorema di Compattezza 1.27 si ottiene immediatamente il seguente teorema:

Teorema 1.29 (Compattezza)**.** *Sia $\{E_i\}$ una successione di insiemi $\mathcal{L}^n$ misurabili tali che*

$$\sup\{P(E_i, A) : \ i \in \mathbb{N}\} < \infty \qquad \forall A \subset\subset \Omega, \ A \text{ aperto.}$$

Allora esiste una sottosuccessione $\left\{E_{i_j}\right\}$ localmente convergente in misura in Ω. Se $|\Omega| < \infty$, allora la sottosuccessione converge in misura.

Proposizione 1.30 (Proprietà del Perimetro)**.**

(i). La funzione $\Omega \to P(E,\Omega)$ è la restrizione di una misura di Borel rispetto agli insiemi aperti di $\mathbb{R}^n$.

(ii). $E \to P(E,\Omega)$ è semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza locale in misura.

(iii). $E \to P(E,\Omega)$ è locale i.e. se $|E \triangle F \cap \Omega| = 0$, allora $P(E,\Omega) = P(F,\Omega)$

(iv). $P(E,\Omega) = P(\Omega \setminus E, \Omega)$ ed inoltre si ha

$$P(F \cap E, \Omega) + P(F \cup E, \Omega) \leqslant P(F,\Omega) + P(E,\Omega)$$

Dimostrazione. I punti (i),(ii) e (iii) seguono immediatamente dalle proprietà generali della variazione enunciate in Proposizione 1.19. Quindi resta da dimostrare solo il punto (iv). Dato che per ogni $\varphi \in [C_c^1(\Omega)]^n$ $\int \mathrm{div}\varphi = 0$ si ha

$$\int \chi_{\Omega\setminus E} \mathrm{div}\varphi \, dx = -\int \chi_E \mathrm{div}\varphi \, dx,$$

e quindi passando al estremo superiore al variare di φ si ottiene la prima parte del punto (iv). Per la seconda parte notiamo che per $\varphi \in [C_c^1(\Omega)]$ si ha

$$\begin{aligned}\int \chi_{A\cup B} \mathrm{div}\varphi &= \int \chi_A \mathrm{div}\varphi + \int \chi_A \mathrm{div}\varphi - \int \chi_{A\cap B} \mathrm{div}\varphi \\ &\leqslant P(A,\Omega) + P(B,\Omega) - P(A \cap B, \Omega).\end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Passando al estremo superiore al variare di φ in (1.2.13) si conclude.

□

1.3 MISURE ED INSIEMI k-DIMENSIONALI IN ^{n}

In questa sezione generalizzeremo il concetto di insieme k-dimensionale e di area k-dimensionale per sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Dal punto di vista della Geometria Differenziale gli oggetti "giusti" sono le sottovarietà immerse in $\mathbb{R}^n$. In questo ambito esiste anche un ben definito concetto di area. Inoltre la struttura di varietà Riemanniana rende l'area una quantità intrinseca.

Molto spesso le soluzioni di problemi variazionali geometrici non hanno questa regolarità.

L'approccio della Teoria Geometrica della Misura è quello di trovare misure k-dimensionali definite su tutti gli insiemi tali che la loro restrizione alle k-sottovarietà regolari coincide con la misura di area nel senso della Geometria Differenziale.

1.3.1 *Misure di Haar*

Siano X uno spazio topologico localmente compatto e G un gruppo topologico localmente compatto. Un azione del gruppo G su X e una mappa $A : G \times X \to X$ tale che

(i). $A(e, \cdot)$ è l'identità, dove e è l'identità di G,

(ii). vale la regola di composizione $A(g_1 \cdot g_2, x) = A(g_1, A(g_2, x))$.

Per semplicità denoteremo $A(g, x)$ con $g \cdot x$.

Definizione 1.31.

(i). Sia μ una misura di Radon su X e sia χ una funzione su G. μ si chiama χ-covariante se la misura immagine di μ tramite la mappa $x \to gx$ è $\chi(g) \cdot \mu$ per ogni $g \in G$. Nel caso in cui $\chi = 1$, μ viene chiamata G-invariante.

(ii). Se G agisce su se stesso tramite moltiplicazione a destra, allora le misure G-invarianti non-nulle sono chiamate misure di Haar invarianti a sinistra (oppure semplicemente invarianti a sinistra).

Notiamo che la misura immagine di una misura invariante a sinistra tramite la mappa $j : x \to x^{-1}$ sul gruppo G è una misura di Haar invariante a destra e viceversa.

Definizione 1.32. Sia $A(g, W) = \{A(g, y), y \in W\}$. Diremo che l'azione A di G è equicontinua se per ogni $x \in X$ ed ogni intorno V del punto x, è possibile trovare un intorno aperto W di x tale che se $A(g, W) \cap W \neq \emptyset$, allora $A(g, W) \subset V$.

In questo ambiente generale diamo un risultato di esistenza. I dettagli della dimostrazione si possono trovare in [8].

Teorema 1.33. *Sia X uno spazio topologico localmente compatto e sia G un gruppo topologico localmente compatto il quale agisce su X in maniera equicontinua. Supponiamo inoltre che per ogni x la mappa $x \mapsto g \cdot x$ sia suriettiva ed aperta. Allora esiste una misura G-invariante non-nulla su X i.e.*

$$\int_G f(sx)\ dm(x) = \int_G f(x)\ dm(x) \quad \text{per ogni } s \in G \text{ e } \ f \in C(G). \tag{1.3.1}$$

Osservazione. Le ipotesi del teorema precedente sono soddisfatte nel caso in cui $X = G$, dove l'azione è $A(g, x) = g \cdot x$ e nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $G = \mathrm{GL}_m$, con l'azione naturale.

Corollario 1.34. *Sia G un gruppo topologico compatto. Allora esiste un'unica misura di probabilità invariante a sinistra ed a destra m i.e.*

$$\int_G f(sx)\ dm(x) = \int_G f(x)\ dm(x) = \int_G f(xs)\ dm(x) \qquad \text{per ogni } s \in G \text{ e } s \in C(G). \tag{1.3.2}$$

Inoltre vale

$$\int_G f(x)\ dm(x) = \int_G f(x^{-1})\ dm(x). \tag{1.3.3}$$

Questa misura viene chiamata misura di Haar di G.

Dimostrazione. Utilizzando il Teorema 1.33 è facile vedere che esistono almeno una misura μ invariante a destra e una misura ν invariante a sinistra. Inoltre, dato che il gruppo G è compatto considerando un ricoprimento di G costituito da aperti a chiusura compatta si dimostra che le misure μ e ν sono finite, e quindi possiamo supporre che μ, ν siano di probabilità. Infine, utilizzando l'invarianza ed il Teorema di Fubini si ottiene

$$\int f(y)\, d\nu(y) = \int f(xy)\, d\nu(x)\, d\mu(y) = \iint_G f(xy)\, \nu(x)\, d\mu(y) = \int f(x)\, d\mu(x),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Osservazione 1.35. Sia G un gruppo localmente compatto che agisce su X. Supponiamo che esista un $x \in X$ tale che la mappa $g \mapsto g \cdot x$ è una funzione misurabile. Allora x induce una misura G-invariante su X.

Dimostrazione. Sia μ la misura di Haar su X e m la misura immagine di μ tramite la mappa $g \mapsto g \cdot x$. Allora

$$m(A) = \mu \{g \in G : g \cdot x \in A\}.$$

$$m(h \cdot A) = \mu\Big(\{g \in G : g \cdot x \in h \cdot A\}\Big) = \mu\Big(h^{-1} \{g \in G : g \cdot x \in h \cdot A\}\Big) = m(A).$$

□

Il problema dell'esistenza di una misura invariante ha perfettamente senso anche senza l'ipotesi di locale compattezza di X, oppure di G. Queste ipotesi sono in qualche modo necessarie: non esiste nessuna misura di probabilità di Borel su uno spazio di Hilbert separabile (infinito dimensionale) tale che sia χ-covariante rispetto a tutte le traslazioni. Però esistono misure χ-covarianti rispetto alle traslazioni su un sottospazio denso.

1.3.2 *Misura integralgeometrica*

In questa sezione vogliamo definire la misura integralgeometrica $\mathcal{I}^k$, la quale è una misura k-dimensionale su $\mathbb{R}^n$. Moralmente, per calcolare la misura di un insieme A basta proiettare l'insieme su tutti i piani k-dimensionali e poi fare la media dei valori ottenuti. Come vedremo la misura integralgeometrica coincide con la misura di area nel senso della Geometria Differenziale.

La grassmanniana

Il gruppo ortogonale $O(n)$ consiste di tutte le applicazioni lineari $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ che conservano il prodotto scalare o equivalentemente che preservano la metrica di $\mathbb{R}^n$. Si vede facilmente che $O(n)$ con la norma indotta dallo spazio delle matrici ed avente come prodotto la composizione è un gruppo topologico compatto. Denoteremo con θ_n la misura di Haar su di esso.

Sia k un intero tale che $0 < k < n$. La Grassmanniana, $G(k,n)$ è la collezione di tutti i k-piani in $\mathbb{R}^n$. Possiamo dotare $G(k,n)$ di una struttura metrica ottenuta identificando $V \in G(k,n)$ con la proiezione ortogonale su V, $\pi_V : \mathbb{R}^n \to V$. Per ogni $V, W \in G(k,n)$ definiamo

$$d(V,W) = \|\pi_V - \pi_W\|,$$

dove $\|\cdot\|$ denota la norma indotta da $\mathbb{R}^n$ sullo spazio delle matrici. Questa metrica rende lo spazio $G(k,n)$ compatto. Infatti, $G(k,n)$ visto come sottospazio di $\mathbb{R}^{n\times n}$ è limitato, e le condizioni $\pi^2 = \pi$, $\pi^* = \pi$ e $\mathrm{Tr}(\pi) = k$ implicano che è anche chiuso, quindi compatto. $O(n)$ agisce su $G(k,n)$ in maniera naturale tramite la mappa

$$(g,V) \to g(V).$$

Notiamo che questa azione preserva la distanza ed è anche transitiva (i.e. per ogni $V, W \in G(k,n)$ esiste $g \in O(n)$ tale che $g(V) = W$). Inoltre vale

$$\pi_{g\cdot V} = g\pi_V g^t.$$

Proposizione 1.36. *Esiste un'unica misura di probabilità $O(n)$-invariante, $\gamma_{k,n}$, su $G(k,n)$. Inoltre, fissato $V \in G(k,n)$, per ogni $A \subset G(k,n)$ Boreliano $\gamma_{k,n}(A)$ può essere calcolato come*

$$\gamma_{k,n}(A) = \theta_n\Big(\{\pi \in O(n) : \pi(V) \in A\}\Big).$$

Dimostrazione. È facile dimostrare che $\gamma_{k,m}$ è una misura di probabilità $O(n)$-invariante. Supponiamo che esista un altra misura di probabilità $O(n)$-invariante μ e denotiamo con $B(V,r) = \{W : d(W,V) < r\}$. Definiamo le funzioni f, g come

$$g(r) = \mu(B(V,r)) \qquad f(r) = \gamma_{k,n}(B(V,r)).$$

Dato che le misure sono $O(n)$-invarianti questa definizione è indipendente da V, quindi ben posta. Sia U un insieme aperto, allora per ogni $V \in U$ si ha

$$\lim_{r\downarrow 0} \mu(U \cap B(V,r))/g(r) = 1.$$

Utilizzando il lemma di Fatou si ottiene

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,n}(U) &= \int \liminf_{r\downarrow 0} \frac{\mu(U\cap B(V,r))}{g(r)}\, d\gamma_{k,n}(V) \leqslant \liminf_{r\downarrow 0} \frac{1}{g(r)} \int \mu(U \cap B(V,r))\, d\gamma_{k,n}(V) \\
&= \liminf_{r\downarrow 0} \frac{1}{g(r)} \iint I_U(W) I_{B(V,r)}(W)\, d\gamma_{k,n}(V) d\mu(W) \\
&= \liminf_{r\downarrow 0} \frac{1}{g(r)} \iint I_U(W) I_{B(W,r)}(V)\, d\gamma_{k,n}(V) d\mu(W) \\
&= \liminf_{r\downarrow 0} \frac{1}{g(r)} \int_U \gamma_{k,n}(B(W,r))\, d\mu(W) \\
&= \liminf_{r\downarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)} \cdot \mu(U).
\end{aligned}$$

Quindi per ogni insieme aperto U, abbiamo dimostrato

$$\gamma_{k,n}(U) \leqslant \liminf_{r\downarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)}\mu(U).$$

Prendendo come U l'intero spazio X si ha

$$\liminf_{r\downarrow 0} \frac{g(r)}{f(r)} \geqslant 1.$$

Ripetendo gli stessi argomenti, ma con i ruoli di $\mu, \gamma_{k,n}$ invertiti, si ottiene

$$\limsup_{r\downarrow 0} \frac{g(r)}{f(r)} \leqslant 1.$$

Queste due diseguaglianze implicano che le due misure sono eguali. □

La misura integralgeometrica

Sia V un k-piano e sia $i : \mathbb{R}^k \to V$ un isometria. Commettendo un leggero abuso di notazione, denoteremo con $\mathcal{L}^k$ la misura immagine di $\mathcal{L}^k$ tramite un isometria i. Questa misura è indipendente dall'isometria i. Infatti, date $i : \mathbb{R}^k \to V, j : \mathbb{R}^k \to V$ due isometrie siano $\mu = i_\# \mathcal{L}^k$, $\nu = j_\# \mathcal{L}^k$. Sia $A \subset V$ un insieme Breliano. Visto che $i^{-1}(A)$ e $j^{-1}(A)$ sono isometricamente equivalenti in $\mathbb{R}^k$, la loro misura è uguale: $\mu(A) = \nu(A)$.

Per ogni insieme $A \subset V$ di Borel, denotiamo con ψ_k la misura su $\mathbb{R}^n$ definita come

$$\psi_k(A) = \int_{G(k,m)} \int_V \#\Big(A \cap \pi_V^{-1}(a)\Big) d\mathcal{L}^k(a) d\gamma_{k,n}(V), \tag{1.3.4}$$

dove l'integrazione su V viene fatta usando la misura di Lebesgue ristretta a V. La misurabilità dell'integrando in (1.3.4) è delicata. Per i dettagli su di essa diamo come riferimento [22]. Se l'insieme $A \subset W$, dove W è un k-piano, allora la funzione $\#\Big(A \cap \pi_V^{-1}(a)\Big)$ ha $\mathcal{L}^k$-quasi ovunque valori in $\{0, 1\}$. Infatti, se $\#\Big(A \cap \pi_V^{-1}(a)\Big) > 1$, allora si ha $\dim((a + V^\perp) \cap W) \geqslant 1$ e $a \in V$. Da questo si deduce che $\dim(W \cap V^\perp) \leqslant k - 1$ e quindi tutta la proiezione di V su W ha misura uguale a zero.

Proposizione 1.37. *Sia $V \in G(k, n)$ un k-piano e sia $A \subset V$ un sottoinsieme Boreliano. Allora esiste una costante c indipendente dal k-piano V tale che $\psi_k \llcorner A = c\mathcal{L}^k$.*

Dimostrazione. È facile dimostrare che tutte le misure Boreliane su $\mathbb{R}^k$ finite sui compatti ed invariati per traslazioni sono della forma $c\mathcal{L}^k$ per qualche costante c. Fissato $V \in G(k, n)$, per dimostrare che $\psi_k \llcorner V = c\mathcal{L}^k$ con c eventualmente dipendente da V, basta mostrare che $\psi_k \llcorner V$ è invariante per traslazioni in V ed è finita sui compatti. Se $A \subset V$ la (1.3.4) diventa

$$\psi_k(A) = \int_{G(k,m)} \int_V \mathcal{L}^k(\pi_V(A)) d\gamma_{k,n}(V).$$

Poiché $\mathcal{L}^k(\pi(A)) \leqslant \mathcal{L}^k(A)$ e $\gamma_{k,n}$ è una misura di probabilità si ottiene che ψ_k è finita sui compatti. In maniera analoga, si dimostra anche l'invarianza per traslazioni.
Per dimostrare l'indipendenza di c dalla scelta di $V \in G(k, n)$ basterà mostrare che ψ_k è $O(n)$-invariante. Infatti supponiamo che $V, W \in G(k, n)$ e che ψ_k sia $O(n)$-invariante,

allora esiste una $g \in O(n)$ tale che $g(V) = W$, ma dato che ψ_k è $O(n)$-invariante la costante è la stessa.

Dimostriamo quindi l'$O(n)$-invarianza. Definiamo

$$F(V, A) = \int \#\Big(A \cap \pi_V^{-1}(a)\Big)\, d\mathcal{L}^k(a).$$

$$\begin{aligned} F(gV, g(A)) &= \int \#\Big(g(A) \cap \pi_{gV}^{-1}(a)\Big)\, d\mathcal{L}^k(a) = \int \#\Big(g(A) \cap g\pi_V^{-1} g^t(a)\Big)\, d\mathcal{L}^k(a) \\ &= \int \#\Big(g(A) \cap g\pi_V^{-1}(b)\Big)\, d\mathcal{L}^k(b) = \int \#\Big(A \cap \pi_V^{-1}(b)\Big)\, d\mathcal{L}^k(b) \\ &= F(V, A). \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Infine, dato che $F(V, A) = F(gV, g(A))$ si conclude osservando

$$\int_{G(k,n)} F(gV, G(A))\, d\gamma_{k,n}(V) = \int_{G(k,n)} F(V, A)\, d\gamma_{k,n}(V).$$

□

Per k ed n fissati denoteremo la costante della Proposizione 1.37 con $\beta(k, n)$. La costante $\beta(k, n)$ può essere calcolata e vale

$$\beta(k, n) = \Gamma\Big(\frac{k+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-k+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{-1}\pi^{-1/2}.$$

Definizione 1.38. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel. La misura integralgeometrica k-dimensionale, $\mathcal{I}^k(A)$, è definita come

$$\mathcal{I}^k(A) = \frac{1}{\beta(k, n)} \int_{G(k,n)} \int_V \#\Big(A \cap \pi_V^{-1}(a)\Big) d\mathcal{L}^k(a) d\gamma_{k,n}(V),$$

dove l'integrazione su V viene fatta rispetto alla misura di Lebesgue, identificando V con $\mathbb{R}^k$ tramite una qualsiasi isometria.

1.3.3 *Costruzione di Carathéodory*

In questa sezione, illustreremo un metodo per costruire misure chiamato Costruzione di Carathéodory. Questo procedimento risulterà molto utile in quanto permette di costruire la maggior parte delle misure che si usano in Teoria Geometrica della Misura. Siano X uno spazio metrico, $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X e $\zeta : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ una funzione di insiemi. La funzione ζ viene spesso chiamata *gauge* della misura costruita. In quanto segue supporremo che valgano

(*i*). Per ogni $\delta > 0$ esistono $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ tali che $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta$ e $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(*ii*). Per ogni $\delta > 0$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $\operatorname{diam}(A) \leqslant \delta$ e $\zeta(A) \leqslant \delta$

(1.3.6)

Per ogni $0 < \delta < \infty$ e $A \subset X$ definiamo

$$\psi_\delta(A) = \inf\Big\{\sum \zeta(A_i) :\ A \subset \bigcup A_i, diam(A_i) < \delta, A_i \in \mathcal{A}\Big\}.$$

Osservazione. La funzione d'insieme ψ_δ è monotona decrescente in δ e σ-subadditiva. Infatti, sia $\delta_1 < \delta_2$, allora $\psi_{\delta_1} > \psi_{\delta_2}$ poiché l'insieme dei possibili ricoprimenti di ψ_{δ_2} è più ricco del insieme dei possibili ricoprimenti di ψ_{δ_1}. Dimostriamo ora la σ-subadditività. Per ogni famiglia numerabile di insiemi $\{A_i\}$ scelgiamo la famiglia di insieme $\{A_{i,j} : \ i, j \in \mathbb{N}\}$ tale che $\{A_{i,j} : j \in N\}$ ricopre A_i, $\operatorname{diam}(A_{i,j}) < \delta$ e

$$\sum_{j=0}^{\infty} \zeta(A_{i,j}) - 2^{-i}\varepsilon \leqslant \psi_\delta(A_i). \tag{1.3.7}$$

Allora $\{A_{i,j}\}$ è un ricoprimento ammesso per $\bigcup A_i$. Sommando (1.3.7) al variare di i si ottiene

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \zeta(A_{i,j}) - \varepsilon \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \psi_\delta(A_i).$$

Per la definizione di ψ_δ e l'arbitrarietà di ε si ottiene la tesi.

Teorema 1.39. *La funzione d'insieme ψ definita come*

$$\psi(A) = \lim_{\delta \to 0} \psi_\delta(A).$$

è una misura di Borel. Inoltre se la famiglia $\mathcal{A}$ è composta da insiemi di Borel, allora ψ è Borel regolare i.e. per ogni insieme A tale che $\psi(A) < \infty$ esiste un insieme $B \subset A$ Boreliano tale che $\psi(A \setminus B) = 0$.

Dimostrazione. Notiamo che ψ è σ-subadditiva. Infatti, sia $B = \cup\{B_i\}$, allora utilizzando la σ-subadditività di ψ_δ si ha

$$\psi(B) = \lim_{\delta \to 0} \psi_\delta(B) \leqslant \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \psi_\delta(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \psi(B_i).$$

Per dimostrare che ψ è una misura Borel basta verificare il criterio di Carathéodory i.e.

$$\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B) \text{ se } \operatorname{dist}(A, B) > 0.$$

Siano A, B tali che $\operatorname{dist}(A, B) = d > 0$, $\delta < d$ e sia $\{A_i\}$ un ricoprimento di $A \cup B$ tale che $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta$, allora gli insiemi $I = \{i \in \mathbb{N} : A_i \cap A \neq \emptyset\}$ e $J = \{i \in \mathbb{N} : A_i \cap B \neq \emptyset\}$ sono disgiunti. È facile vedere che $\{A_i : i \in I\}$ ricopre A e $\{A_i : i \in I\}$ ricopre B. Possiamo inoltre assumere che $I \cup J = \mathbb{N}$. Quindi si ha,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(A_i) = \sum_{i \in I} \zeta(A_i) + \sum_{j \in J} \zeta(A_j) \geqslant \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$$

Prendendo l'estremo inferiore su tutti i possibili ricoprimenti si ha $\psi_\delta(A \cup B) \geqslant \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$. Dato che la diseguaglianza opposta è sempre vera si ha $\psi_\delta(A \cup B) = \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$. Quindi facendo tendere δ a zero si ottiene

$$\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B).$$

Vogliamo adesso dimostrare la seconda parte del teorema. Per ogni $A \subset X$ scegliamo la famiglia di insiemi $\{A_{i,j}\} \subset \mathcal{A}$ tali che

$$A \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} A_{i,j} \text{ e } \operatorname{diam}(A_{i,j}) \leqslant 1/i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \zeta(A_{i,j}) \leqslant \psi_{1/i}(A) + 1/i.$$

Siano $B_n = \bigcap_{i=0}^{n} \bigcup_{j=0}^{\infty} A_{i,j}$ e $B = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$, allora $\psi(B) = \psi(A)$. Infatti, dato che $A \subset B$ si ha che $\psi(A) \leqslant \psi(B)$. Per dimostrare la diseguaglianza inversa, osserviamo che

$$\psi(B) \leqslant \lim_{n\to\infty} \psi_{1/n}(B_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \zeta(A_{n,j}) \leqslant \lim_{n\to\infty} \psi_{1/n}(A) + 1/n = \psi(A).$$

□

1.3.4 *Misure di Hausdorff*

Definizione 1.40. Siano $k \geqslant 0$ e $B \subset \mathbb{R}^n$. Indicheremo con $\mathcal{H}^k$ la misura di Hausdorff k-dimensionale ottenuta dalla Costruzione di Carathéodory avente come insiemi test $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, dove $\mathcal{P}(X)$ è la famiglia di tutte le parti di X, e come funzione di gauge

$$\zeta(S) = \frac{\omega_k}{2^k}(\mathrm{diam}(S))^k,$$

dove la costante ω_k vale

$$\omega_k = \pi^{k/2}/\Gamma(1 + k/2).$$

Osservazione. Quando $k \geqslant 1$ è un numero intero, la costante di rinormalizzazione ω_k è uguale al volume della palla unitaria in $\mathbb{R}^k$. È interessante notare che dalla costruzione di Carathéodory si ottiene la stessa misura $\mathcal{H}^k$, che si sarebbe ottenuta se come famiglia di insiemi test, $\mathcal{A}$ prendiamo:

(*i*). la famiglia di tutti gli insiemi chiusi;

(*ii*). la famiglia di tutti gli insiemi aperti;

(*iii*). la famiglia di tutti gli insiemi convessi.

Dato che la chiusura e l'inviluppo convesso di un insieme E hanno lo stesso diametro si deduce la (i) e la (iii). Per dimostrare il punto (iii) notiamo innanzitutto che se $A \subset \mathbb{R}^n$, allora $\mathrm{diam}(A_\varepsilon) \leqslant \mathrm{diam}(A) + 2\varepsilon$, dove A_ε è l'ε-intorno. Se $\{A_j\}$ è un ricoprimento di A tale che $\sum \mathrm{diam}(A_j)$ approssima $\mathcal{H}^k(A)$, allora si vede che $\left\{(A_j)_{\varepsilon_j}\right\}$ per ε_j sufficientemente piccoli ancora approssima $\mathcal{H}^k(A)$. Osserviamo che $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti.

Utilizzando il Teorema 1.39 si ottiene che le misure di Hausdorff sono Borel regolari. In realtà, vale il seguente risultato piú forte. I dettagli della dimostrazione si possono trovare in [38, Theorem 57], [21, Theorem 5.4] e [22, 2.10.47].

Teorema 1.41. *Sia $B \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel. Allora si ha*

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup\left\{\mathcal{H}^s(C) : C \subset B,\ C \textit{ compatto e } \mathcal{H}^s(C) < \infty\right\}.$$

Proposizione 1.42 (Proprietà delle misure di Hausdorff)**.** *Le misure di Hausdorff hanno le seguenti proprietà:*

(i)*. Traslazioni e omotetie:*

$$\mathcal{H}^t(A + z) = \mathcal{H}^t(A) \ \ \forall\ z \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{H}^t(\lambda A) = \lambda^t \mathcal{H}^t(A) \ \ \forall \lambda > 0.$$

(ii). Per ogni $0 \leqslant s < t < \infty$ e per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ sia ha

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = \infty,$$

$$\mathcal{H}^s(A) < \infty \implies \mathcal{H}^t(A) = 0.$$

(iii). Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una mappa Lipschitziana, allora si ha

$$\mathcal{H}^t(f(A)) \leqslant [Lip(f)]^t \mathcal{H}^t(A).$$

Dimostrazione.
(i) Le proprietà di traslazione ed omotetia di $\mathcal{H}$ derivano dallo stesso comportamento della funzione di gauge. Inoltre, dato che la mappa di traslazione e quella di omotetia sono mappe bi-Lipschitziane, si può dimostrare il punto (i) applicando il punto (iii).
(ii) Sia $\{A_i\}$ un ricoprimento di A con $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta$. Allora si ha

$$\sum_{i=i}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^t \leqslant \delta^{t-s} \sum_{i=i}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^s.$$

Prendendo l'estremo inferiore nella diseguaglianza precedente si ottiene

$$2^t \omega_t^{-1} \mathcal{H}^t_\delta(A) \leqslant \delta^{t-s} 2^s \omega_s^{-1} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

La tesi segue facilmente dal ultima diseguaglianza.
(iii) Sia $\{A_i\}$ un ricoprimento di A con $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta$. Dato che $\operatorname{diam}(f(E))^t \leqslant [\operatorname{Lip}(f)]^t \operatorname{diam}(E)$ si vede che

$$\omega_t 2^{-t} \sum_{i=i}^{\infty} \operatorname{diam}(f(A_i))^t \leqslant \omega_t 2^{-t} [\operatorname{Lip}(f)]^t \sum_{i=i}^{\infty} \operatorname{diam}(A_i)^t.$$

Prendendo l'estremo inferiore nella diseguaglianza precedente si ottiene $\mathcal{H}^t_\delta(f(A)) \leqslant [\operatorname{Lip}(f)]^t \mathcal{H}^t_\delta(A)$. La tesi segue facilmente facendo tendere δ a zero. □

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Utilizzando il punto (ii) della Proposizione 1.42, esiste un numero reale t_0 tale che $\mathcal{H}^t(A) = 0$ per ogni $t > t_0$ e $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ per ogni $s < t_0$. Notiamo inoltre che questo non implica che $0 < \mathcal{H}^{t_0}(A) < \infty$. Infatti esistono insiemi E, F tali che $\mathcal{H}^{t_0}(E) = 0$ e $\mathcal{H}^{t_0}(F) = \infty$.

Definizione 1.43. Definiamo dimensione di Hausdorff di un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ come

$$\mathcal{H}\text{-}\dim(A) = \inf \{s \geqslant 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Osservazione. Si verifica facilmente utilizzando la Proposizione 1.42 che

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\text{-}\dim(A) &= \inf \{s \geqslant 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup \{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} \\ &= \sup \{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} = \inf \{s : \mathcal{H}^s(A) < \infty\}.\end{aligned}$$

La dimensione di Hausdorff è monotona rispetto all'inclusione ed è stabile rispetto all'unione numerabile i.e.

$$\mathcal{H}\text{-}\dim(A) \leqslant \mathcal{H}\text{-}\dim(B) \quad \text{per } A \subset B,$$

$$\mathcal{H}\text{-}\dim\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}\text{-}\dim(A_i).$$

Una dimostrazione del seguente Teorema può essere trovata in [36, Theorem 8.8].

Teorema 1.44 (Lemma di Frostman)**.** *Sia B un insieme di Borel in $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{H}^s(B) > 0$ se solo se esiste una misura $\mu \in \mathcal{M}(B)$ tale che $\mu(B(x,r)) < r^s$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$. Inoltre, possiamo scegliere μ tale che per ogni insieme B di Borel $\mu(B) \geqslant c\mathcal{H}^s_\infty(B)$, dove $c > 0$ dipende solo da n.*

Teorema 1.45. *Siano $A \subset \mathbb{R}^m$ e sia $B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi di Borel non vuoti. Allora si ha*

(i). Se $\mathcal{H}^s(A) > 0$ e $\mathcal{H}^t(B) > 0$, allora $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$

(ii). $\mathcal{H}$-dim$(A) + \mathcal{H}$-dim$(B) \leqslant \mathcal{H}$-dim$(A \times B)$

Dimostrazione. Per dimostrare il primo punto siano $\mu \in \mathcal{M}(A)$ e $\nu \in \mathcal{M}(B)$ due misure di Radon come nel Lemma di Frostman (Teorema 1.44) tali che $\mu(B(x,r)) < r^s$, $\nu(B(y,r)) < r^t$ per ogni $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$. Allora $\mu \otimes \nu \in \mathcal{M}(A \times B)$ e

$$\mu \otimes \nu(B((x,y),r)) \leqslant \mu \otimes \nu(B(x,r) \times B((y,r)) \leqslant \mu(B(x,r)) \cdot \nu(B(y,r)) \leqslant r^{s+t}.$$

Utilizzando adesso l'altra implicazione del lemma di Frostman si conclude la dimostrazione del primo punto.

Il secondo punto segue dal primo. Infatti, sia $s' < \mathcal{H}\text{-dim}(A)$ e $t' < \mathcal{H}\text{-dim}(B)$, allora si ha $\mathcal{H}^s(A) > 0$ e $\mathcal{H}^t(B) > 0$. Quindi il primo punto implica che $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$. Da cui si ottiene $s' + t' < \mathcal{H}\text{-dim}(A \times B)$. Prendendo l'estremo superiore su s', t' si ottiene la tesi. □

Vogliamo ora mostrare tramite un esempio l'esistenza di insiemi di dimensione di Hausdorff non intera. Nel nostro caso si tratta di *insieme autosimile* o *"frattale"*. Partiamo dal intervallo chiuso $I_0 = [0,1]$. Poi togliamo da I_0 il segmento centrale $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ottenendo $I_1 = [0, 1/4] \cup [3/4]$. Nel passo successivo togliamo da ciascuno dei intervalli $[0, 1/4]$, $[3/4]$ i rispettivi segmenti centrali $(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}), (\frac{12}{16}, \frac{15}{16})$ ottenendo I_2. Procedendo in questo modo si ottiene in maniera induttiva per ogni n un insieme I_n. Denotiamo con $C := \bigcap_n I_n$. L'insieme C è un insieme compatto e $\mathcal{L}$-nullo. Inoltre, $x \in C$ se solo se

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{4^n}, \qquad \text{con } k_n = 0, 3 \ (\mathrm{mod}\ 4).$$

Denotiamo inoltre per semplicità di notazione $s = 1/2$. Mostriamo che $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$. Per dimostrare che $\mathcal{H}^s(C) < \infty$ basta esibire per ogni δ un ricoprimento $\{A_i\}$ con $\mathrm{diam}(A_i) \leqslant \delta$ tale che $\sum \mathrm{diam}(A_i)^s < \alpha < \infty$. Un tale ricoprimento è composto dai intervalli che appaiono in I_n. Con questa scelta $\alpha = 1$. Utilizzando il Teorema 1.44, l'esistenza di una misura di probabilità μ tale che $\mu(B(x,r)) \leqslant cr^s$ implica l'altra diseguaglianza. Sia $\mu_n := \mathcal{L}(I_n)^{-1}\mathcal{L}(I_n)$. Dato che nella topologia debole $\{\mu_n\}$ ha chiusura compatta, possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $\mu_{n_k} \to \mu$. È facile dimostrare che $\mathrm{spt}(\mu) = C$. Inoltre, per costruzione, si ha che $\mu_h([a,b])$ con a, b della forma $k/2^m$ è definitivamente costante, e che $\mu_h([k/2^m, (k+1)/2^m]) \leqslant 2^{-sm}$. Per ogni palla $B(x,r)$, a patto di prendere un n abbastanza grande, possiamo trovare una componente connessa $[k/2^m, (k+1)/2^m]$ di I_n contenuta in $B(x,r)$. Prendendo n_0 il più piccolo di tali n si ottiene la disuguaglianza che $2^{-n_0} \leqslant r \leqslant 2^{-n_0+2}$ e quindi $\mu_h(B(x,r)) \leqslant \mu([k/2^{n_0-2},(k+1)/2^{n_0-2}]) \leqslant (4r)^s$. Infine usando la convergenza debole $\mu_{n_h} \to \mu$ si ottiene

$$\mu(B(x,r)) \leqslant \liminf_{h\to\infty} \mu_{n_h}(B(x,r)) \leqslant 2r^s.$$

Il primo studio sistematico sugli insiemi frattali è stato fatto da Hutchinson in [29]. Per maggiori approfondimenti indichiamo [20, 21].

Osserviamo inoltre che se uno dei due insiemi nel Teorema 1.45 è un insieme frattale, allora vale l'uguaglianza (v. [36]).

Illustriamo ora la costruzione ed alcuni risultati senza dare dimostrazioni sui insiemi frattali.
Denotiamo con $\mathcal{S} = \{S_1,\dots,S_k\}$ una famiglia di similitudini su $\mathbb{R}^n$ di ragioni $\rho_i < 1$. Diremo che un sottoinsieme E è $\mathcal{S}$-invariante se

$$E = S_1(E) \cup \cdots \cup S_k(E)$$

Inoltre diremo che la famiglia di similitudini verifica la *condizione di aperto* se esiste un aperto limitato A tale che $S_i(A) \subset\subset A$ ed inoltre per ogni $i \neq j$ si ha $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$.

Teorema 1.46. *Sia $\mathcal{S}$ una famiglia di similitudini in $\mathbb{R}^n$ di ragioni $\rho_i < 1$. Allora esiste un'unico insieme compatto $\mathcal{S}$-invariante K ed inoltre K ha dimensione di Hausdorff α, dove α è la soluzione dell'equazione*

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i^\alpha = 1.$$

Inoltre se la famiglia di similitudini $\mathcal{S}$ soddisfa la condizione di aperto per qualche aperto limitato U, allora l'insieme invariante K è contenuto in U, ha dimensione α ed inoltre si ha $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < \infty$.

L'insieme C costruito in precedenza può essere costruito con queste tecniche considerando similitudini $S_1 : x \mapsto x/4$ e $S_2 : x \mapsto 3/4 + x/4$. Inoltre, non è difficile dimostrare che queste similitudini soddisfano la condizione di aperto.

Costruzione di Carathéodory e Misura Integral Geometrica

Proposizione 1.47. *La misura k-dimensionale integralgeometrica $\mathcal{I}^k$ in $\mathbb{R}^n$ può essere definita tramite la costruzione di Carathéodory scegliendo come famiglia di "insiemi test", la famiglia dei insiemi Boreliani e definendo come funzione di gauge*

$$\zeta(A) = \int \mathcal{H}^m(\pi_V(A))\ d\gamma_{k,n}(V).$$

Dimostrazione. Non è difficile verificare che la funzione ζ soddisfa le condizioni (i) e (ii) in (1.3.6) e quindi possiamo effettuare la costruzione di Carathéodory. Inoltre, dato che per ogni famiglia numerabile di insiemi $\{A_n\}$ si ha

$$\mathcal{H}^k\Big(\pi_V(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^k(\pi_V(A_n))$$

, e quindi si ottiene $\zeta(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n \zeta(A_n)$.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel. Scegliamo una successione $(\mathcal{A}_i)$ di partizioni di Borel per A tale che ogni elemento di $\mathcal{A}_i$ sia l'unione di una sottofamiglia di insiemi di $\mathcal{A}_{i+1}$ ed inoltre valga

$$\lim_{i\to\infty} \sup \{\operatorname{diam}(S) : \ S \in \mathcal{A}_i\} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{i\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{A}_i} \zeta(S) = \psi(A).$$

Per costruire una tale successione di partizioni è sufficiente considerare $\mathcal{A}_i = \{A \cap Q^i_m\}$, dove $\{Q^i_m : \ m \in \mathbb{N}\}$ è una partizione di $\mathbb{R}^k$ formata da cubi di lato 2^{-i}. Dato che per ogni insieme di Borel C ed ogni suo ricoprimento $\{C_i\}$ si ha $\sum_i \zeta(C_i) \geqslant \zeta(C)$, otteniamo che $\mathcal{I}^k(C) \geqslant \zeta(C)$, e quindi

$$\mathcal{I}^k(A) = \sum_{S\in\mathcal{A}_j} \mathcal{I}^k(S) \geqslant \sum_{S\in\mathcal{A}_j} \zeta(S), \tag{1.3.8}$$

da cui si ottiene che $\lim_j \sum_{S\in\mathcal{A}_j} \zeta(S) = \mathcal{I}^k(A)$. Osserviamo inoltre che per la nostra scelta di $(\mathcal{A}_i)$ si ha

$$\sum_{S\in\mathcal{A}_j} \chi_{\pi_V(S)}(y) \uparrow \# \left\{\pi_V^{-1}(y) \cap A\right\} \qquad \text{per } j \to \infty. \tag{1.3.9}$$

Infine utilizzando il Teorema di Fubini e poi il Teorema di Convergenza Monotona si ottiene

$$\begin{aligned}\psi(A) &= \lim_{j\to\infty} \sum_{S\in\mathcal{A}_j} \zeta(S) = \lim_{j\to\infty} \int \sum_{S\in\mathcal{A}_j} \chi_{\pi_V(S)}(y)\, d\mathcal{H}^k(y)\, d\gamma_{k,n}(V) \\ &= \int \# \left\{\pi_V^{-1}(y) \cap A\right\} d\mathcal{H}^k(y)\, d\gamma_{k,n}(V),\end{aligned} \tag{1.3.10}$$

il che conclude. □

Uno strumento molto importate in questo ambito sono la formula dell'area e quella di coarea

Definizione 1.48. Sia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una mappa Lipschitziana differenziabile nel punto $a \in \mathbb{R}^m$.

- Se $m = n$ allora definiamo lo Jacobiano m-dimensionale come $\mathbf{J}_m\, df_a = \det(df_a)$.
- Se $m \leqslant n$ allora definiamo lo Jacobiano m-dimensionale come $\mathbf{J}_m\, df_a = \sqrt{\det[(df_a)^* df_a]}$.
- Se $m \geqslant n$ allora definiamo lo Jacobiano n-dimensionale come $\mathbf{J}_n\, df_a = \sqrt{\det[df_a (df_a)^*]}$.

Osservazione. Possiamo dare allo Jacobiano il seguente significato geometrico. Quando $m \leqslant n$ si vede facilmente che $\mathbf{J}_m\, df_a = \mathcal{H}^k(Q)$, dove $Q = [0,1]^m$, quindi è il fattore con cui cambia l'area del parallelepipedo standard in $\mathbb{R}^m$. Nel altro caso, $m \geqslant n$ si vede che

$$\mathbf{J}_m\, df_a = \sup \{\mathcal{H}^m(df_a(P)) : \ P \text{ parallelepipedo in } \mathbb{R}^n, \mathcal{H}^m(P) = 1\}.$$

Teorema 1.49 (Formula dell'Area). *Sia $k \leqslant n$ e sia $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ una mappa Lipschitziana. Allora per ogni insieme misurabile E si ha che la mappa $y \mapsto \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y))$ è $\mathcal{L}^k$ misurabile ed inoltre si ha*

$$\int_E \mathbf{J}^E_k(df_x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y))\, d\mathcal{L}^k(y), \tag{1.3.11}$$

per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^k$ misurabile.

Teorema 1.50 (Formula di Coarea)**.** *Sia $k \leqslant n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ una funzione Lipschitziana. Sia inoltre $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile. Allora la funzione $t \to \mathcal{H}^{n-k}(E \cap f^{-1}(t))$ è $\mathcal{L}^k$-misurabile in $\mathbb{R}^k$. Inoltre si ha*

$$\int_E J_k df_x \, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \mathcal{H}^{n-k}\Big(f^{-1}(t) \cap E\Big) \, d\mathcal{L}^k(t)$$

1.3.5 *Insiemi Rettificabili*

Introduciamo ora gli oggetti che giocano il ruolo delle varietà in Teoria Geometrica della Misura.

Definizione 1.51. Sia E un insieme di Borel in $\mathbb{R}^m$. E viene detto numerabilmente $\mathcal{H}^k$-rettificabile se $\mathcal{H}^k$-quasi tutto E è contenuto nell'unione numerabile di immagini di funzioni Lipschitziane $f_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ i.e.

$$\mathcal{H}^k\Big(E \cap \Big(\bigcup f_j(\mathbb{R}^k)\Big)\Big) = 0.$$

E viene detto $\mathcal{H}^k$-rettificabile se è numerabilmente $\mathcal{H}^k$-rettificabile e $\mathcal{H}(E) < \infty$.

Teorema 1.52 (Teorema di estensione di Whitney)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e siano inoltre $f : A \to \mathbb{R}$ e $v : A \to \mathbb{R}^n$ funzioni continue tali che per ogni successioni (x_n) e (y_n) di elementi di A convergenti al medesimo elemento $z \in A$ e $x_n \neq y_n$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n) - \langle v(z), y_n - x_n \rangle}{|y_n - x_n|} = 0. \tag{1.3.12}$$

Allora esiste una funzione di classe C^1 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che

- *$g(a) = f(a)$ per ogni $a \in A$*
- *$\nabla g(a) = v(a)$ per ogni $a \in A$.*

La dimostrazione di una versione più generale di questo teorema si può trovare in [22]

Proposizione 1.53. *Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ un insieme di misura finita e sia $f : A \to \mathbb{R}^n$ una funzione Lipschiziana. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione C^1 $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tale che*

$$\mathcal{L}^m\Big(\{x \in A : f(x) \neq g(x)\}\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Dimostrazione. Per il teorema di estensione delle funzioni Lipschitziane non è restrittivo considerare f definita su tutto $\mathbb{R}^n$. Utilizzando il Teorema di Rademacher applicato a f, il Teorema di Lusin applicato a ∇f e la regolarità della misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ possiamo trovare un insieme chiuso B in $\mathbb{R}^n$ formato da punti di differenziabilità per f, tale che $|A \setminus B| < \varepsilon/2$ e tale che ∇f sia continua su B. Denotiamo con $v(x)$ la restrizione di ∇f a B e denotiamo con $h_k(x)$ la funzione definita da

$$h_k(x) = \sup\left\{\frac{f(y) - f(x) - \langle v(x), y - x\rangle}{|y - x|} : y \in B(x, 1/k)\right\}. \tag{1.3.13}$$

Dato che f è differenziabile in B, $h_k(x) \to 0$ puntualmente in B, per il Teorema di Egoroff e la regolarità della misura di Lebesgue esiste un sottoinsieme chiuso $B_1 \subset B$

con $|B \setminus B_1| < \varepsilon/2$ e tale che h_k converge uniformemente a 0 per $k \to \infty$. Quest'ultima condizione è equivalente a (1.3.12). Quindi applicando il Teorema di estensione di Whitney a f ed a v su B_1 si ottiene la funzione desiderata g. Per concludere basta notare che $|A \setminus B_1| < \varepsilon$. □

Osservazione 1.54. La tesi del teorema precedente è valida anche senza l'ipotesi di finitezza di $|A|$. Infatti basta prendere un ricoprimento di $\mathbb{R}^k$ in cubi disgiunti di lato 1, Q_n e poi scegliere in ciascun Q_n un aperto $U_n \subset\subset \mathring{Q}$ tale che $Q_n \setminus U_n \leqslant 2^{-k-1}\varepsilon$ ed estendere per ogni aperto U_n come nella Proposizione precedente con $\varepsilon 2^{-k-1}$ ed in modo che la funzione estesa abbia supporto in $\mathring{Q}_n$.

Lemma 1.55. *L'insieme E è numerabilmente $\mathcal{H}^k$-rettificabile se solo se $E \subset \bigcup_{j \geqslant 0} M_j$, dove $\mathcal{H}^k(M_0) = 0$ ed ogni M_j con $j \geqslant 1$ è una k-varietà C^1 immersa in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Chiaramente se $E \subset \bigcup_{j \geqslant 0} M_j$, dove M_j sono tali che $\mathcal{H}^k(M_0) = 0$ ed ogni M_j è una k-varietà C^1 immersa in $\mathbb{R}^n$, allora si ha la $\mathcal{H}^k$-rettificabilità. Quindi vogliamo mostrare la neccessità di questa condizione.

Supponiamo che E sia un insieme $\mathcal{H}^k$-rettificabile quindi E è contenuto $\mathcal{H}^k$-quasi ovunque in

$$\bigcup_{j \geqslant 0} f_j(\mathbb{R}^k),$$

dove f_j sono delle mappe Lipschitziane. Per l'Osservazione 1.54 applicata a ciascuna delle f_j si possono trovare delle mappe $h_{i,j}$ tali che

$$\mathcal{L}^k\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} \{x : f_j(x) \neq h_{i,j}(x)\} \Big) = 0.$$

Per semplicità di notazione denotiamo con F_i

$$F_i = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x : f_j(x) \neq h_{i,j}(x)\}.$$

Dato che le funzioni f_i sono Lipschitziane si ha $\mathcal{H}^k(f_i(F_i)) = 0$. Inoltre, per ogni i si ha

$$f_i(\mathbb{R}^k) \subset f_i(F_i) \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} g_{i,j}(\mathbb{R}^k).$$

$g_{i,j}(\mathbb{R}^k)$ è localmente una k-varietà in tutti i punti in cui lo Jacobiano k-dimensionale è diverso da zero. Denotiamo con

$$C_{i,j} = \{x : J(h_{i,j}) = 0\}.$$

Per la formula dell'area si ha $\mathcal{H}^k(h_{i,j}(C_{i,j})) = 0$. Inoltre $U_{i,j} = \mathbb{R}^k \setminus C_{i,j}$ è un insieme aperto in $\mathbb{R}^k$ per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ e $J(h_{i,j}) \neq 0$ in $U_{i,j}$. È facile verificare adesso che $h_{i,j}(U_{i,j})$ è una sottovarietà immersa in $\mathbb{R}^n$. Infine, denotando con

$$M_0 = \bigcup_{j=0}^{\infty} f_j(F_j) \cup \bigcup_{i,j=0}^{\infty} h_{i,j}(C_{i,j}),$$

si conclude.

□

Proposizione 1.56. *Sia E un insieme numerabilmente $\mathcal{H}^k$-rettificabile. Allora esiste una famiglia di insiemi compatti $\{E_i : i \geqslant 0\}$ tali che*

(i). $\mathcal{H}^k(E_0) = 0$;

(ii). $E_i \cap E_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$;

(iii). *Per ogni* $j \geqslant 1$ $E_j \subset M_j$, *dove* M_j *è una varietà immersa* C^1 k*-dimensionale in* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Siano M_j come nel Lemma 1.55. Definiamo induttivamente S_j nel modo seguente

- $S_0 = E \cap M_0$;
- $S_{j+1} = (E \cap M_{j+1}) \setminus \bigcup_{i=0}^{j} S_i$.

Chiaramente gli insiemi S_i soddisfano le condizioni (i),(ii) e (iii). Dato che M_i è uno spazio a base numerabile non è restrittivo supporre che $S_i = f_i(\tilde{S}_i)$, dove $f_i : \tilde{S}_i \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una funzione iniettiva di classe C^1. Utilizzando la regolarità della misura di Lebesgue possiamo ricoprire $\tilde{S}_i$ a meno di un insieme di misura nulla con una famiglia di insiemi compatti e disgiunti $\tilde{E}_{i,j}$. Si conclude osservando che $\{E_{i,j}\}$, dove $E_{i,j} = f_j(\tilde{E}_{i,j})$, sono compatti e soddisfano (i),(ii) e (iii). □

Proposizione 1.57 (Formula di Crofton)**.** *Per ogni insieme $\mathcal{H}^k$-rettificabile E la misura integralgeometrica k-dimensionale di E è uguale alla sua misura di Hausdorff k-dimensionale.*

Dimostrazione. L'idea della dimostrazione è di trovare una partizione numerabile $\{E_i\}$ di E, approssimare $\mathcal{I}^k(E_i)$ e $\mathcal{H}^k(E_i)$ con $\mathcal{I}^k(p_i(E_i))$ e $\mathcal{H}^k(p_i(E_i))$ rispettivamente, dove p_i è la proiezione in un opportuno k-piano ed utilizzare poi la coincidenza delle due misure sui k-piani per concludere.

Per la Proposizione 1.56 non è restrittivo supporre che $E \subset M$, dove M è una k-varietà C^1 in $\mathbb{R}^n$. Possiamo supporre ulteriormente che $E \subset \varphi(\overline{B(0,1)})$, dove $\varphi : B(0,2) \to \mathbb{R}^n$ è una carta locale. Denotiamo con $\tilde{E} = \varphi^{-1}(E)$. Utilizzando la formula dell'area si ha

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}^k(E) &= \frac{1}{\beta(k,n)} \int_{G(k,n)} \int_V \#\Big(\varphi(\tilde{E}) \cap \pi_V^{-1}(a)\Big)\, d\mathcal{L}^k(a)\, d\gamma_{k,n}(V) \\
&= \frac{1}{\beta(k,n)} \int_{G(k,n)} \int_V \#\Big(\tilde{E} \cap (\varphi^{-1} \circ \pi_V^{-1})(a)\Big)\, d\mathcal{L}^k(a)\, d\gamma_{k,n}(V) \qquad (1.3.14) \\
&= \frac{1}{\beta(k,n)} \int_{G(k,n)} \mathcal{H}^k(\pi_V \circ \varphi(\tilde{E}))\, d\gamma_{k,n}(V).
\end{aligned}
$$

Utilizzando la continuità di $d\varphi_x$, per ogni punto $x \in \overline{B(0,1)}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un r tale che

- $\|p_x d\varphi_y - d\varphi_x\| \leqslant \varepsilon$,
- $\|d\varphi_y - d\varphi_x\| \leqslant \varepsilon$,

per ogni $y \in \overline{B(x,r)}$, dove p_x è la proiezione in $\mathbb{R}^n$ sul k-piano $d\varphi_{x_i}(\mathbb{R}^k)$. Usando il teorema di Besicovich-Vitali possiamo estrarre una sottofamiglia numerabile disgiunta di palle $\mathcal{F} = \{B(x_i, \rho_i) : \ i \in \mathbb{N}\}$ tale che

- $\|d\varphi_y - d\varphi_{x_1}\| \leqslant \varepsilon$ e $\|p_{x_i} d\varphi_y - d\varphi_{x_i}\| \leqslant \varepsilon$ per ogni $y \in \overline{B(x_i, \rho_i)}$;
- $\mathcal{F}$ ricopre $\mathcal{L}^k$ quasi tutto $\overline{B(0,1)}$.

Per semplicità di notazione denoto $\tilde{E}_i = \tilde{E} \cap B(x_i, r_i)$. Usando la compattezza di $G(k,n)$ e la regolarità della mappa $\mathbb{R}^{n\times k} \ni A \mapsto \mathbf{J}_k(pA)$ per ogni $y \in E_i$ si ha

$$\begin{aligned} |\,\mathbf{J}_k(pp_{x_i} d\varphi_y) - \mathbf{J}_k(pd\varphi_y)| &\leqslant |\,\mathbf{J}_k(pp_{x_i} d\varphi_y) - \mathbf{J}_k(pd\varphi_{x_i})| + |\,\mathbf{J}_k(pd\varphi_{x_i}) - \mathbf{J}_k(pd\varphi_y| \\ &\leqslant C\varepsilon. \end{aligned}$$

Adesso è possibile dare una stima diretta di $|\mathcal{I}^k(\varphi(\tilde{E}_i)) - \mathcal{I}^k(p_{x_i}\varphi(\tilde{E}_i))|$

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}^k(\varphi(\tilde{E}_i)) - \mathcal{I}^k(p_{x_i}(\varphi(\tilde{E}_i)))| &\leqslant \frac{1}{\beta(k,n)} \int_{G(k,n)} \int_{E_i} |\,\mathbf{J}_k(p \cdot p_{x_i} \cdot d\varphi_y) - \mathbf{J}_k(p \cdot d\varphi_y)|\, d\mathcal{L}^k \, d\gamma_{k,n} \\ &\leqslant C\varepsilon \mathcal{L}^k(E_i). \end{aligned}$$

In maniera analoga si dimostra che

$$|\mathcal{H}^k(\varphi(\tilde{E}_i)) - \mathcal{H}^k(p_{x_i}(\varphi(\tilde{E}_i)))| \leqslant \int_{\tilde{E}_i} |\,\mathbf{J}_k(p_{x_i} \cdot d\varphi_y) - \mathbf{J}_k(d\varphi_y)|\, d\mathcal{L}^k(y)) \leqslant C\varepsilon \mathcal{L}^k(\tilde{E}_i)$$

Mettendo insieme le due diseguaglianze appena dimostrate ed utilizzando la Proposizione 1.37 si ottiene

$$|\mathcal{I}^k(\varphi(\tilde{E}_i)) - \mathcal{H}^k(\varphi(\tilde{E}_i))| \leqslant C\varepsilon \mathcal{L}^k(\tilde{E}_i)$$

e quindi si ha

$$|\mathcal{I}^k(E) - \mathcal{H}^k(E)| \leqslant C\varepsilon \mathcal{L}^k(\tilde{E}).$$

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene la tesi. □

Definizione 1.58. Un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ è completamente non k-rettificabile se per ogni insieme E k-rettificabile si ha

$$\mathcal{H}(E \cap F) = 0.$$

Teorema 1.59. *Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme tale che $\mathcal{H}^k(A) < \infty$, allora esiste un insieme k-rettificabile massimale $B \subset A$ tale che $A \setminus B$ è completamente non k-rettificabile. Quindi ogni insieme di misura di $\mathcal{H}^k$ finita si può univocamente decomporre in una parte k-rettificabile ed una parte completamente non k-rettificabile*

Dimostrazione. Sia m l'estremo superiore dei numeri $\mathcal{H}(A \cap E)$, dove E sono insiemi k-rettificabili. Sia E_i una successione tale che $\mathcal{H}^k(E_i \cap A) \geqslant m - 1/i$, allora prendendo $B = A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ si ottiene la tesi. □

Teorema 1.60 (di struttura di Federer)**.** *Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ un insieme tale che $\mathcal{H}^k(F) < \infty$. Allora è completamente non k-rettificabile se solo se per $\gamma_{k,n}$-quasi ogni $p \in G(k,n)$ si ha $\mathcal{H}^k(p(E)) = 0$.*

Una delle due implicazioni è banale. Infatti se per assurdo esiste $F_0 \subset F$ rettificabile con $\mathcal{H}^k(F_0) > 0$, allora per la Proposizione 1.57 si ottiene che $\mathcal{H}^k(p(F)) \geqslant \mathcal{H}^k(p(F_0)) > 0$ per un insieme non trascurabile, il che nega l'ipotesi.

Supponiamo per un attimo che esista un insieme F completamente non k-rettificabile. Dato che, per $\gamma_{n,k}$-quasi ogni V, la funzione $a \mapsto \#\{\pi_V(a) \cap A\}$ è nulla per ogni $a \notin \pi_V(A)$

si deduce che $\mathcal{I}^k(F) = 0$.

Vogliamo ora esibire un insieme di dimensione uno e completamente non 1-rettificabile. Osserviamo che se $A \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme 1-rettificabile, allora uno tra $\mathcal{L}(p_1(A)), \mathcal{L}(p_2(A))$ è diverso da zero, dove p_1 e p_2 sono rispettivamente le proiezioni sul primo e sul secondo asse coordinato. Infatti, dato che una curva di classe C^1 è localmente grafico in x oppure in y ed utilizzando la rettificabilità di A, possiamo supporre senza perdita di generalità che $A = \{(x, f(x)) : x \in \tilde{A}\}$, dove $A \subset \mathbb{R}$ e f è una funzione di classe C^1. Se $\mathcal{L}^1(\tilde{A}) = 0$, allora per il punto (iii) della Proposizione 1.42 si ha $\mathcal{H}^1(A) = 0$, il che contraddice l'ipotesi $\mathcal{H}^1(A) > 0$.
Consideriamo $E = C \times C \subset \mathbb{R}^2$, dove C è l'insieme costruito in pagina 29. Dato che $p_1(E) = p_2(E) = C$ e che $\mathcal{L}(C) = 0$, C è completamente non 1-rettificabile. Dimostriamo che $\mathcal{H}$-$\dim(E) = 1$. Dato che $\mathcal{H}$-$\dim(C) = 1/2$ ed utilizzando la Proposizione 1.45 si ottiene che $\mathcal{H}$-$\dim(E) \geqslant 1$. Per dimostrare che $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ basta esibire per ogni δ un ricoprimento $\{A_i\}$ con $\operatorname{diam}(A_i) \leqslant \delta$ tale che $\sum \operatorname{diam}(A_i)^1 < \alpha < \infty$. Un tale ricoprimento è composto dai quadrati che intervengono nella costruzione di E. Con questa scelta si ha $\alpha = \sqrt{2}$.

Criteri di Rettificabilità

Definizione 1.61 (k-coni)**.** Sia V un k-piano in $\mathbb{R}^n$ e sia $V^\perp$ il suo ortogonale. Definiamo il cono $C(V, \alpha)$ come

$$C(V, \alpha) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ |\pi_V^\perp(x)| \leqslant \alpha |\pi_V(x)| \right\}.$$

Inoltre indicheremo con $C(x, V, \alpha) := x + C(V, \alpha)$.

Lemma 1.62 (Lemma Geometrico)**.** *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. Supponiamo che esista un k-piano V ed una costante reale $\alpha \geqslant 0$ tali che*

$$S \subset C(x, V, \alpha), \quad \textit{per ogni } x \in S. \tag{1.3.15}$$

Allora esiste una funzione $f : V \to V^\perp$ tale che $S \subset \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n : \ x \in V\}$.

Dimostrazione. Denotiamo con π la proiezione su V, con $\pi^\perp$ la proiezione su $V^\perp$ e con $G := \pi(S)$. La condizione (1.3.15) implica che la mappa $\pi_{|S}$ è iniettiva. Sia $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}$ un sistema di coordinate tale che $V = \{(x, y) : \ y = 0\}$. Si vede facilmente che per ogni $x \in G = \pi(S)$, esiste un unica $y \in V^\perp$ tale che $(x, y) \in G$. Quindi possiamo definire una mappa $g : G \to V^\perp$ tale che

$$S = \{(x, f(x)) : \ x \in G\}.$$

Osserviamo che se $z_1 = (x_1, g(x_1))$ e $z_2 = (x_2, g(x_2))$, allora si ha

$$\pi(z_1 - z_2) = x_1 - x_2 \quad \text{e} \quad \pi^\perp(z_1 - z_2) = g(x_1) - g(x_2).$$

Per la condizione (1.3.15) si ha $|g(x_1) - g(x_2)| \leqslant \alpha |z_1 - z_2|$, e quindi si ottiene la Lipschitzianità di g. $\square$

Teorema 1.63. *Sia E un insieme tale per ogni $x \in E$ esistano un k-piano π_x e due costanti $\alpha(x) \geqslant 0$ e $\rho(x) > 0$ tali che*

$$E \cap B(x, \rho(x)) \subset C(x, \pi_x, \alpha(x)).$$

Allora E è contenuto nell'unione del immagine di un numero al più numerabile di grafici Lipschitziani le cui costanti non eccedono $2 \sup_x \alpha(x)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\alpha := \sup \{\alpha(x) : \ x \in S\} < \infty$. Denotiamo con S_i gli insiemi definiti come

$$S_i := \left\{ x \in S : \ \rho(x) > \frac{1}{i} \right\} \qquad i \geqslant 1,$$

Sia $\delta > 0$ tale che valgano

$$\frac{\alpha + \delta(\alpha + 1)}{1 - \delta(\alpha + 1)} \leqslant 2\alpha, \qquad \delta(\alpha + 1) < 1.$$

Dato che $G(k, n)$ è compatto e quindi totalmente limitato, possiamo trovare $\pi_1, \ldots, \pi_m \subset G(k, n)$ tali che per ogni $\pi \in G(k, n)$ si ha $\min_j |\pi_j - \pi| < \delta$. Definiamo

$$S_{i,j} := \{x \in S_i : \ |\pi_x - \pi_j| \leqslant \delta\}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

È sufficiente dimostrare che ogni $T \subset S_{i,j}$ con $\operatorname{diam}(T) < 1/i$ è contenuto in un k-grafico Lipschitziano con costante di Lipschitz minore di 2α. Siano $x, x' \in T$. Osserviamo che l'identità $\pi_x^\perp - \pi_j^\perp = \pi_j - \pi_x$

$$\begin{aligned} |\pi_j^\perp(x - x')| &\leqslant |\pi_x^\perp(x - x')| + \delta|[\pi_x - \pi_j](x - x')| \leqslant \alpha|\pi_x(x - x')| + \delta|x - x'| \\ &\leqslant \alpha|\pi_j(x - x')| + \delta(\alpha + 1)|x - x'| \\ &\leqslant [\alpha + \delta(\alpha + 1)]|\pi_j(x - x')| + \delta(\alpha + 1)|\pi_j^\perp(x - x')| \end{aligned}$$

Per la nostra scelta di δ si ha $|\pi_j^\perp(x - x')| \leqslant 2\alpha|\pi_j(x - x')|$ e quindi $T \subset C(x, \pi_j, 2\alpha)$. Utilizzando il Lemma Geometrico 1.62 si ottiene la rettificabilità di T, il che conclude la dimostrazione. □

1.4 Densità, misure tangenti e piani tangenti approssimati

Definizione 1.64. Sia μ una misura di Radon positiva in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $k \geqslant 0$. La densità k-dimensionale superiore ed inferiore sono definite rispettivamente come

$$\Theta_k^*(\mu, x) := \limsup_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu(B(x, \rho))}{\omega_k \rho^k}, \qquad \Theta_{*k}(\mu, x) := \liminf_{\rho \downarrow 0} \frac{\mu(B(x, \rho))}{\omega_k \rho^k}. \tag{1.4.1}$$

Nel caso in cui $\Theta_k^*(\mu, x) = \Theta_{*k}(\mu, x)$ il loro valore comune sarà denotato con $\Theta_k(\mu, x)$.

La mappa $x \mapsto \Theta_k^*(\mu, x)$ è di Borel. Infatti, dato che $\mu(B(x, r))$ è continua a sinistra è facile verificare che i limiti in (1.4.1) rimangono invariati se il limite inferiore o superiore viene fatto utilizzando i numeri razionali. Inoltre, la definizione rimarebbe invariata se invece di considerare palle aperte consideriamo palle chiuse.

Teorema 1.65. *Sia μ una misura di radon positiva in. Allora per ogni $t \in (0,\infty)$ e per ogni insieme di Borel B valgono le seguenti implicazioni:*

(i). se per ogni $x \in B$ si ha $\Theta^*_k(\mu,x) \geqslant t$, allora $\mu \geqslant t\mathcal{H}^k \llcorner B$;

(ii). se per ogni $x \in B$ si ha $\Theta^*_k(\mu,x) \geqslant t$, allora $\mu \leqslant 2^k t\mathcal{H}^k \llcorner B$.

Dimostrazione. (i) Possiamo assumere senza perdita di generalità che $t = 1$, $k \geqslant 0$. Fissiamo $\delta > 0$. Sia $\mathcal{F} = \{C_i : i \in I\}$ una famiglia di palle chiuse tale che i loro centri ricoprono B e $\mu(C_i) \geqslant (1-\delta)\omega_k\rho_i^k$, dove ρ_i è la il raggio della palla ρ_i. Utilizzando il Teorema di ricoprimento di Besicovich si ottiene l'esistenza di $\xi(n)$ sottofamiglie disgiunte di insiemi $\mathcal{F}_j$ tali i centri di $\mathcal{F}' = \cup\mathcal{F}_j$ ricoprono B e quindi

$$\mathcal{H}^k_\delta \leqslant \sum_{C_i \in \mathcal{F}'} \frac{\omega_k}{2^k}\mathrm{diam}(C_i) \leqslant \frac{1}{1-\delta}\sum_{j=1}^{\xi(n)}\sum_{C_i\in\mathcal{F}_j}\mu(C_i) \leqslant \frac{\xi(n)}{1-\delta}\mu(B),$$

da cui si ha che $\mathcal{H}^k(B) < \infty$. Infine utilizzando il Teorema di Ricoprimento di Vitali possiamo estrarre una sottofamiglia disgiunta $\{C_j : j \in J\}$ tale che $\bigcup_J C_j$ ricopre $\mathcal{H}^k$-quasi tutto B, e quindi

$$\mathcal{H}^k(B) = \mathcal{H}^k\Big(\bigcup_{j\in J} C_j\Big) \leqslant \sum_{j\in J}\frac{\omega_k}{2^k}\mathrm{diam}(C_j) \leqslant \frac{1}{1-\delta}\mu(B).$$

(ii) Fissiamo $\tau > 1$ e poniamo

$$B_h := \left\{x \in B : \frac{\mu(B(x,\rho))}{\omega_k\rho^k} < \tau,\ \forall\rho \in (0,1/h)\right\}.$$

La successione di insiemi B_h converge monotonamente a B. Sia $\{C_i\}$ un ricoprimento B_h con diametro minore di $1/h$, tale che $C_i \cap B_h \neq \varphi$ e

$$\sum \omega_k \mathrm{diam}(C_i) \leqslant \mathcal{H}^k_{1/h}(B_h).$$

Dato che $C_i' := \bar{B}(x_i, 2\rho_i)$ ricopre B_h si ha

$$\mu(B_h) \leqslant \sum_i \mu(C_i') \leqslant \tau\sum\omega_k 2(\rho_i)^k \leqslant 2^k\tau\Big(\mathcal{H}^k(B_h) + 1/h\Big).$$

Infine passando al limite per $h \to \infty$ e poi per $\tau \downarrow 1$ si conclude. □

Definizione 1.66. Sia μ una misura in $\mathbb{R}^n$, $\rho > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Denotiamo con $\mu_{\rho,x}$ la misura definita come

$$\mu_{x,\rho}(A) = \mu(x + \rho A) \quad \text{per ogni } A \subset \mathbb{R}^n \text{ di Borel.}$$

Osserviamo che la misura $\mu_{x,\rho}$ coincide con la misura immagine tramite la mappa $I^{x,\rho}(y) := (y-x)/\rho$.

Definizione 1.67. Sia μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^n$. Denoteremo con $\mathrm{Tan}^k(\mu,x)$ l'insieme di tutte le misure ν tali che esiste una successione infinitesima (ρ_i) tale che $\rho_i^{-k}\mu_{\rho_i,x} \to \nu$ debolmente* nel senso delle misure.

Osservazione 1.68. Siano μ, ν due misure di Radon tali che $|\mu - \nu|(B(x, \rho)) = o(\rho^k)$. Supponiamo inoltre che (ρ_i) sia una successione infinitesima tale che $\rho_i^{-k}\mu_{x,\rho} \to \sigma$ debolmente*, allora $\rho_i^{-k}\nu_{x,\rho_i} \to \sigma$. Per mostrare questa affermazione è sufficiente vedere che per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\lim_{i\to\infty} \rho_i^{-k} \left| \int \varphi \, d\mu_{x,\rho_i} - \int \varphi \, d\nu_{x,\rho_i} \right| = 0.$$

Quindi, sia $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e supponiamo che $|\varphi| \leqslant C\chi_{B(0,r)}$, allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_i^k} \left| \int \varphi\Big(\frac{y-x}{\rho_i}\Big) \, d\mu(y) - \int \varphi\Big(\frac{y-x}{\rho_i}\Big) \, d\nu(y) \right| &\leqslant \frac{1}{\rho_i^k} \int \chi_{B(x,\rho_i r)} \, d|\mu - \nu| \\ &\leqslant r^k \frac{1}{(r\rho)^k} |\mu - \nu|(B(x, r\rho)). \end{aligned}$$

Definizione 1.69. Sia μ una misura di Radon in un aperto Ω a valori $\mathbb{R}^h$ e sia $x \in \Omega$. Diremo che μ ha come spazio tangente approssimato $\pi \in G(k, n)$ con molteplicità $\theta \in \mathbb{R}^n$ se $\rho^{-k}\mu_{x,\rho}$ converge debolmente* a $\theta\mathcal{H}^k \llcorner \pi$ per $\rho \downarrow 0$. Indicheremo questo fatto con

$$\mathrm{Tan}(\mu, x) = \theta\mathcal{H}^k \llcorner \pi$$

Teorema 1.70 (Località di $\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$)**.** *Sia μ una misura di Radon positiva in $\mathbb{R}^n$ e sia $f \in L^1(\mu)$ una funzione di Borel. Allora si ha*

$$\mathrm{Tan}^k(f\mu, x) = f \, \mathrm{Tan}^k(\mu, x) \qquad \textit{per } \mu\textit{-q.o. } x.$$

Dimostrazione. Dimostreremo che la tesi è vera per ogni punto x nel insieme dei punti di Lebesgue

$$B_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, \rho))} \int_{B(x,\rho)} |f(y) - f(x)| \, d\mu(u) = 0 \right\}.$$

Per il Teorema di Continuità in Media in $\mathbb{R}^n$ si ha $\mu(\mathbb{R}^n \setminus B_1) = 0$. Sia quindi $x \in B_1$ e supponiamo che $\rho^{-k}\mu_{\rho,x} \to \nu$ debolmente* in misura. Allora per ogni palla $B(0, r)$ si ha

$$\begin{aligned} \rho^{-k}|f(x)\mu_{\rho,x} - (f\mu)_{\rho,x}|(B(0, r)) &\leqslant \rho^{-k} \int_{B(x,\rho r)} |f(y) - f(x)| \, d\mu(y) \\ &= \left| \frac{\mu(B(x, \rho r))}{\rho^k} \right| \left| \frac{1}{\mu(B(x, \rho r))} \int_{B(x,\rho r)} |f(y) - f(x)| \, d\mu(y) \right|. \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

Utilizzando la convergenza debole* di $\mu_{\rho,x} \to \nu$ si ottiene

$$\limsup_{\rho\to\infty} \left| \frac{\mu(B(x, \rho r))}{(\rho r)^k} \right| = \limsup_{\rho\to\infty} \left| \frac{\mu_{\rho,x}(B(0, r))}{\rho^k} \right| \leqslant |\nu(\overline{B(0, r)})| < \infty,$$

Utilizzando la limitatezza di $\rho^{-k}\mu(B(x, r\rho))$ si ottiene che $\rho^{-k}|f(x)\mu_{\rho,x} - (f\mu)_{\rho,x}|(B(0, r)) \to 0$. Quindi, abbiamo dimostrato che se esiste $\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$, allora $\mathrm{Tan}^k(f\mu, x) = f(x)\,\mathrm{Tan}^k(\mu, x)$. Con gli stessi argomenti si dimostra l'uguaglianza nel caso in cui esista $\mathrm{Tan}(\mu, x)$ e $f > 0$. □

Osservazione 1.71. Siano f tale che $\mu = f|\mu|$ e $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue per f rispetto a $|\mu|$. Allora $\nu = \mathrm{Tan}^k(\mu, x)$ se solo se $|\nu| = \mathrm{Tan}^k(|\mu|, x)$. Infatti, dato che $f \in \{+1, -1\}$ per $|\mu|$-quasi ogni x si ha $f(x)\nu = f(x)\,\mathrm{Tan}^k(f|\mu|, x) = \mathrm{Tan}^k(|\mu|, x)$.

Osservazione 1.72. Sia μ una misura di Radon e sia x tale che $\theta\mathcal{H}\llcorner\pi = \mathrm{Tan}^k(\mu, x)$, allora dato che $\theta\mathcal{H}\llcorner\pi(\partial B(x, r)) = 0$ si ha

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \frac{\mu(B(x,\rho))}{\rho^k} = \lim_{\rho\downarrow 0} \frac{1}{\rho^k}\mu_{x,\rho}(B(0,1)) = \theta\mathcal{H}^k(B(0,1)) = \omega_k\theta, \tag{1.4.3}$$

per ogni $\alpha > 0$. In maniera analoga a quanto fatto in (1.4.3) si ottiene

$$|\mu|(B(x,\rho) \setminus C(x,\pi,\alpha)) = o(\rho^k) \quad \text{per ogni } \alpha > 0. \tag{1.4.4}$$

Le misure tangenti possono essere viste come generalizzazioni del concetto del piano tangente per una sottovarietà di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$ nel seguente senso: se Γ una k-sottovarietà di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$, $x \in \Gamma$ e $\mu := \mathcal{H}^k\llcorner\Gamma$, allora non è difficile dimostrare che

$$\rho^{-k}\mu_{x,\rho} = \mathcal{H}^k\llcorner\Big((\Gamma - x)/\rho\Big);$$

come vedremo in seguito per ogni $x \in \Gamma$ si ha

$$\rho^{-k}\mu_{x,\rho} = \mathcal{H}^k\llcorner\,\mathrm{Tan}(\Gamma, x).$$

Definizione 1.73. Sia μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^k$. Diremo che μ è k-rettificabile se esistono un insieme numerabilmente k-rettificabile E ed una funzione di Borel $\theta : E \to \mathbb{R}^n$ tale che $\mu = \theta\mathcal{H}^k\llcorner E$

Nei casi in cui $k = 0$ oppure $k = n$ si ottengono rispettivamente le misure atomiche e le misure assolutamente continue rispetto a Lebesgue.

Teorema 1.74 (Criterio di rettificabilità per misure)**.** *Sia μ una misura di Radon positiva in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

(i). Se $\mu = \theta\,\mathcal{H}\llcorner S$, dove S è $\mathcal{H}^k$-rettificabile, allora μ ammette un piano tangente approssimato con molteplicità $\theta(x)$ per $\mathcal{H}^k$-q.o. $x \in S$.

(ii). Se μ è concentrata in un insieme di Borel S ed ammette piano tangente approssimato con molteplicità $\theta(x) > 0$ per μ-q.o. $x \in S$, allora S è numerabilmente k-rettificabile ed inoltre si ha $\mu = \theta\mathcal{H}^k\llcorner S$. In particolare

$$\exists\,\mathrm{Tan}^k(\mu, x) \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \mu \text{ è } k\text{-rettificabile.}$$

Dimostrazione. (i) Supponiamo che $S = f(K)$ per qualche $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ funzione iniettiva di classe C^1 con differenziale sempre di rango massimo e K compatto. Dimostriamo che $\theta\,\mathcal{H}^k\llcorner f(K)$ ha un piano tangente approssimato con molteplicità θ per ogni $x \in f(E)$, dove $E \subset K$ sono i punti di Lebesgue di K in cui

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \rho^{-k} \int_{B_\rho(y)} |\theta(f(z))\,\mathbf{J}_k(df_z) - \theta(f(y))\,\mathbf{J}_k(df_y)|\,dz = 0. \tag{1.4.5}$$

Infatti, sia $y_0 \in E$ e $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$, denotiamo con $x_0 = f(y_0)$. Utilizzando la formula dell'area si ottiene

$$\begin{aligned}\rho^{-k}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,d\mu_{x_0,\rho}(x) &= \rho^{-k}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\Big(\frac{x-x_0}{\rho}\Big)\,d\mu(x)\\ &= \rho^{-k}\int_S \theta(x)\varphi\Big(\frac{x-x_0}{\rho}\Big)\,d\mathcal{H}^k(x)\\ &= \rho^{-k}\int_K \theta(f(y))\varphi\Big(\frac{f(y)-f(y_0)}{\rho}\Big)\,\mathbf{J}_k\,df_y\,dy\\ &= \int_{K_\rho}\theta(f(y_0+\rho z))\varphi\Big(\frac{f(y_0+\rho z)-f(y_0)}{\rho}\Big)\,\mathbf{J}_k\,df_{y_0+\rho z}\,dz,\end{aligned}$$

dove $K_\rho = (K-y_0)/\rho$. Dato che φ ha supporto compatto e df_{y_0} ha rango k, si può verificare facilmente che i supporti delle funzioni $z \mapsto \varphi([f(y_0+\rho z)-f(y_0)]/\rho))$ sono equilimitate per ρ sufficientemente piccolo. Inoltre, dato che x è un punto di Lebesgue per K si può verificare facilmente che K_ρ converge a $\mathbb{R}^k$ localmente in misura. Quindi, utilizzando la (1.4.5), la convergenza di χ_{K_ρ} in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^k)$, ed il Teorema di convergenza di Vitali si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\downarrow 0}\rho^{-k}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,d\mu_{x_0\rho}(x) &= \theta(x_0)\,\mathbf{J}_k\,df_{y_0}\int_{\mathbb{R}^k}\varphi(df_{y_0}(z))\,dz\\ &= \theta(x_0))\int_{\pi_0}\varphi(x)\,d\mathcal{H}^k(x)\end{aligned}$$

con $\pi_0 = df_{y_0}(\mathbb{R}^k)$. Questo dimostra che $\theta(x_0)\mathcal{H}^k\llcorner\pi_0 = \mathrm{Tan}^k(S,x_0)$.

Utilizzando il Teorema di Continuità in Media di Lebesgue, segue che $\mathcal{H}^k(f(K)\setminus f(E)) = 0$. Questo dimostra che $\mathrm{Tan}^k(\theta\mathcal{H}^k\llcorner f(K),x)$ esiste ed ha molteplicità $\theta(x)$ per $\mathcal{H}^k$-q.o. $x \in f(K)$.

Dimostriamo il caso generale. Per il Teorema 1.56, possiamo trovare una famiglia di insiemi compatti E_i tali che $\mathcal{H}^k$-quasi ogni $x \in S$ appartiene ad un solo dei E_i. Denotiamo con $\mu := \theta\mathcal{H}^k\llcorner S$. Per quanto dimostrato prima, ognuna delle $\mu\llcorner E_i = \chi_{E_i}\mu$ ammette piano tangente approssimato per quasi ogni $x \in E_i$. Utilizzando il Teorema 1.70 si ottiene che $\chi_{E_i}\mathrm{Tan}^k(\mu,x) = \mathrm{Tan}^k(\mu\llcorner E_i,x)$ per μ-q.o. $x \in E_i$ e quindi per la positività di θ si ottiene lo stesso risultato per $\mathcal{H}^k$-quasi ogni $x \in E_i$.
(ii) Per ogni intero $n \geqslant 1$ definiamo

$$S_n := \left\{x \in S : \mu(B(x,\rho)) \geqslant \frac{\rho^k}{n},\ \forall\rho \in (0,1/n)\right\}$$

Dato che $\rho^{-k}\mu_{x,\rho} \to \theta\mathcal{H}\llcorner\pi_x$ per $\rho \to 0$ e $\mathcal{H}^k\llcorner\pi_x(\partial B(0,1)) = 0$ si ha

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\rho^{-k}\mu_{x,\rho}(B(0,1)) = \theta(x)\omega_k.$$

Quindi $S = \bigcup S_i$. Dimostriamo per assurdo che S_n soddisfa le ipotesi del Teorema 1.63 con $\alpha(x) = 2$ e $\rho(x)$ abbastanza piccolo. Sia $(x_h) \subset S_n \setminus C(x,\pi_x,2)$ una successione convergente ad $x \in S_n$. Utilizzando la definizione di $C(x,\pi_x,2)$ si dimostra facilmente che $|\pi_x^\perp(x_h-x)| \geqslant 2|\pi(x_h-x)|$ e quindi

$$|\pi_x^\perp(x_h-x)| \geqslant \frac{2}{\sqrt{5}}|x_h-x|.$$

Inoltre, si può facilmente dimostrare che se $\rho_h = |x_h - x|/(2\sqrt{5})$ allora $B_{\rho_h}(x_h)$ non interseca $C(x, \pi_x, 1)$. Quindi per $\alpha = 1 + 2\sqrt{5}$ e $\rho_h < 1/n$ e per definizione di S_n si ha

$$\mu\Big(B(x, \alpha\rho_h) \setminus C(x, \pi_x, 1)\Big) \geqslant \mu(B(x_h, \rho_h)) \geqslant \frac{\rho_h^k}{n}. \tag{1.4.6}$$

Per la (1.4.4) $\mu(B(x, \alpha\rho)) \setminus C(x, \pi_x, 1) = o(\rho^k)$ il che contraddice quanto trovato in (1.4.6). □

1.5 STRUTTURA DEI INSIEMI DEGLI PERIMETRO FINITO

In questa sezione otterremo una descrizione completa della struttura degli di perimetro finito dovuta a E. De Giorgi. In particolare dimostreremo l'esistenza di un insieme $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile $\mathcal{F}E$, chiamato frontiera ridotta, tale che $D\chi_E$ coincide con $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$. La dimostrazione di questo risultato richiederà l'utilizzo tutti gli strumenti fino ad ora introdotti.

La sezione è organizzata nel seguente modo: la prima parte sarà dedicata ad alcuni strumenti molto importanti (interessanti in se) come la diseguaglianza isoperimetrica, la formula di coarea per funzioni BV; nella seconda parte dimostreremo la struttura degli insiemi di perimetro finito.

I valori non regolari di una funzione di classe C^1 possono essere descritti tramite il Teorema di Sard. Una possibile dimostrazione può essere trovata in [22, 3.4.3].

Teorema 1.75 (di Sard)**.** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n \geqslant m$ una funzione di classe C^k con $k \geqslant \max(n - m - 1, 1)$ e sia A l'insieme dei punti critici di f i.e. i punti in cui df_x non ha rango massimo. Allora $f(A)$ ha misura di Lebesgue nulla in $\mathbb{R}^m$.*

Osservazione 1.76. Nel caso in cui $m = 1$, questo teorema dice che per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni valore $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(t)$ non ha punti critici e quindi per il Teorema della Funzione Implicita si ha che per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(t)$ è una varietà immersa di classe C^1.

Teorema 1.77 (Formula di Coarea per funzioni BV)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Allora vale*

$$V(u, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\{x \in \Omega : \ u(x) > t\}, \Omega)\, dt. \tag{1.5.1}$$

In particolare se $u \in BV(\Omega)$ l'insieme $\{x \in \Omega : \ u(x) > t\}$ ha perimetro finito in Ω per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e valgono

$$\begin{aligned} |Du|(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega)\, dt, \\ Du(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} D\chi_{\{u>t\}}(\Omega)\, dt. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Dimostrazione. Dato che l'affermazione è invariante se modifichiamo u in un insieme $\mathcal{L}^n$-nullo, possiamo assumere senza perdita di generalità che u sia Boreliana.
Per ogni funzione Boreliana v definiamo

$$E_t(v) := \{x \in \Omega : \ v(x) > t\}.$$

Dato che l'insieme $\{(t,x) : v(x) > t\} = F^{-1}(\Delta)$, dove $F(t,x) = (t, u(x))$ e $\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > x_1\}$, è Boreliano si ottiene che la mappa $(t,x) \to \chi_{E_t(v)}(x)$ è Boreliana.

Consideriamo innanzitutto il caso in cui $u \in C^1(\Omega)$. L'insieme $\{u > t\}$ è un aperto con frontiera $\{u = t\}$. Inoltre per l'Osservazione 1.76 si ha che $\{u = t\}$ è una sottovarità di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$ per $\mathcal{L}^1$ quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi utilizzando il Teorema della divergenza si ottiene che $P(E_t(u), \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\{u = t\} \cap \Omega)$ per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $t \in \mathbb{R}$.
Infine usando la Formula di Coarea si ha

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}\Big(\{u = t\} \cap \Omega \Big)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t(u), \Omega)\, dt.$$

Per il caso generale dimostriamo prima $\leqslant$ in (1.5.1). Notiamo innanzitutto che per ogni funzione Boreliana positiva $v : \Omega \to \mathbb{R}$ si ha $v(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t(v)}(x)\, dt$ ed analogamente si ha

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t(v)}(x)\, dt - \int_{-\infty}^0 \Big(1 - \chi_{E_t(v)}(x) \Big)\, dt.$$

Utilizzando il Teorema di Fubini per ogni $\varphi \in [C_c^1(\Omega)]^n$ con $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int_\Omega u(x) \mathrm{div}\varphi(x)\, dx &= \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{E_t(u)}(x) \mathrm{div}\varphi(x)\, dt\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_\Omega \chi_{E_t(u)}(x) \mathrm{div}\varphi(x)\, dx\, dt \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t(u), \Omega)\, dt, \end{aligned}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato che $\int_\Omega \mathrm{div}\varphi\, dx = 0$.

Per dimostrare la diseguaglianza opposta non è restrittivo supporre che $V(u, \Omega) < \infty$. Inoltre per la regolarità interna del perimetro e della variazione possiamo supporre ulteriormente che $u \in L^1(\Omega)$ e quindi che $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Per il Teorema 1.23 esiste una successione $(u_h) \subset C^\infty(\Omega)$ tale che $u_h \to u$ in $L^1(\Omega)$ e $|Du_h|(\Omega) \to Du(\Omega)$. Inoltre osserviamo che se $u_{h_k} \to u$ puntualmente per $\mathcal{L}^n$-q.o. x, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{L}^n\Big(\{u = t\} \Big) = 0$ si ha $\chi_{E_t(u_h)} \to \chi_{E_t(u)}$ puntualmente per $\mathcal{L}^n$-q.o. x. Quindi utilizzando la semicontinuità del perimetro si ottiene l'altra diseguaglianza:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t(u), \Omega)\, dt &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \liminf_{k\to\infty} P\Big(E_t(u_h), \Omega\Big)\, dt \\ &\leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P\Big(E_t(u_h), \Omega\Big)\, dt = \lim_{k\to\infty} |Du_h|(\Omega) = |Du|(\Omega). \end{aligned}$$

Dimostrare ora la (1.5.2). Se B è un insieme aperto e $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ (quindi $u \in \mathrm{BV}(B)$) per la prima parte del teorema si ha $|Du|(B) = \int_{-\infty}^{\infty} |Du|(B)\, dt$. Dato che gli insiemi aperti sono una base si ottiene la coincidenza delle misure. Per dimostrare la seconda uguaglianza in (1.5.2) notiamo che per ogni $\varphi \in [C_c^1(\Omega)]^n$ si ha

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi\, dDu &= -\int_\Omega \mathrm{div}\varphi(x) u(x)\, dx \\ &= -\int_\Omega \mathrm{div}\varphi(x) \Big(\int_0^\infty \chi_{E_t(v)}(x)\, dt - \int_{-\infty}^0 \Big(1 - \chi_{E_t(v)}(x)\Big)\, dt \Big)\, dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_\Omega \mathrm{div}\varphi(x) \chi_{E_t(v)}(x)\, dx \Big)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_\Omega \varphi\, dD\chi_{E_t(u)} \Big)\, dt \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di φ si conclude. $\square$

Se $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che $u(x) \in (a, b)$ per $\mathcal{L}^n$-quasi ogni $x \in \Omega$, allora la formula di coarea nella Proposizione 1.77 si può riscrivere come

$$V(u, \Omega) = \int_a^b P(\{x \in \Omega : \ u(x) > t\}, \Omega)\, dt.$$

Infatti, se $t > b$ allora $E_t = \{u > t\} = \emptyset$, quindi $P(E_t, \Omega) = 0$; se $t < a$ allora $E_t = \{u > t\} = \Omega$ e quindi $P(E_t, \Omega) = 0$.

Definizione 1.78. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n$-misurabile e sia Ω il più grande aperto tale che E ha localmente perimetro finito in r. Chiameremo frontiera ridotta $\mathcal{F}E$ la collezione di tutti i punti x tali che esiste il limite

$$\nu_E := \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E(B_\rho(x))|}$$

ed inoltre $|\nu_E(x)| = 1$. La funzione $\nu_E(x) : \mathcal{F}E \to S^{n-1}$ viene chiamata *normale interna generalizzata* di E.

Definizione 1.79. Per ogni $t \in [0, 1]$ e per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ poniamo $E^t = \{x : \ \Theta_n(E, x) = t\}$ i.e.

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \lim_{\rho \downarrow 0} \frac{|E \cap B(x, \rho)|}{\omega_k \rho^k} = t \right\}.$$

Denoteremo con $\partial_* E$ la frontiera essenziale i.e. l'insieme dei punti la cui densità è compresa tra 0 e 1.

Spesso E^1 viene chiamata la parte interna nel senso della teoria della misura.

Teorema 1.80 (isoperimetrica locale)**.** *Sia $Q \subset \mathbb{R}^n$ un n-cubo di lato L. Allora per ogni $u \in \mathrm{BV}(Q)$ si ha*

$$\int_Q |u - u_Q|\, dx \leqslant nL|Du|(Q), \tag{1.5.3}$$

dove $u_Q := L^{-n} \int_Q u\, dx$. In particolare, per ogni insieme E di Borel si ha la disuguaglianza isoperimetrica relativa

$$2\frac{|E \cap Q|}{L^n} \cdot \frac{|E \setminus Q|}{L^n} \leqslant n\frac{P(E, Q)}{L^{n-1}}. \tag{1.5.4}$$

Dimostrazione. Per il Teorema 1.23, non è restrittivo supporre che $u \in C^\infty(\Omega)$. Con omotetie e traslazioni possiamo supporre che Q si un cubo unitario. Dimostreremo la diseguaglianza per induzione su n. Per $n = 1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_Q |u - u_Q|\, dx = \int_Q \left| \int_Q (u(x) - u(t))\, dt \right| dx &\leqslant \int_{Q^2} \int_{t \wedge x}^{t \vee x} |u'(r)|\, dx\, dt\, dr \\ &\leqslant \iiint_{Q^3} |u'(r)|\, dx\, dt\, dr = |Du|(Q).\end{aligned}$$

Sia $x = (y, z)$, con $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $z \in \mathbb{R}$, $Q = Q' \times I$ e sia

$$\varphi(z) = \int_{Q'} u(y, z)\, dy.$$

Utilizzando l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned}\int_Q |u-u_Q|\,dydz &\leqslant \int_Q |u-\varphi|\,dydz + \int_Q |\varphi - u_Q|\,dydz \\ &\leqslant (n-1)\int_I\int_{Q'} |\nabla_y u|\,dydz + \int_I |\varphi-\varphi_I|\,dx \\ &\leqslant (n-1)\int_Q |\nabla_y u|\,dx + \int_I |\varphi'(z)|\,dz \leqslant n\int_Q |\nabla u|\,dx\end{aligned}$$

Infine, dimostriamo (1.5.4): senza perdita di generalità possiamo supporre che E sia un insieme di perimetro finito in Q; inserendo $u=\chi_E$ in (1.5.3) si ottiene quanto voluto. □

Teorema 1.81. *Sia $n>1$ un intero. Per ogni insieme E di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ uno tra E e $\mathbb{R}^n\setminus E$ ha misura finita. Inoltre si ha*

$$\min\{|E|,|\mathbb{R}^n\setminus E|\} \leqslant \gamma_n\,[P(E,\mathbb{R}^n)]^{n/(n-1)}\,, \tag{1.5.5}$$

dove γ_n è una costante dimensionale.

Dimostrazione. Osserviamo che se

$$|Q|^{(n-1)/n} > 2nP(E,\mathbb{R}^n), \tag{1.5.6}$$

allora per la (1.5.4) si ha

$$\frac{|Q\cap E|}{|Q|}\cdot\frac{|Q\setminus E|}{|Q|} < \frac{1}{4}. \tag{1.5.7}$$

Definiamo $\alpha(Q)=|Q\cap E|/|E|$. Dato che $\alpha(Q)(1-\alpha(Q))<1/4$ si ha $\alpha(Q)\in[0,1/2)\cup(1/2,1]$. Quindi utilizzando un argomento di connessione otteniamo $\alpha(Q)\in[0,1/2)$ oppure $\alpha(Q)\in(1/2,1)$ per ogni cubo Q che verifica (1.5.6). Supponiamo, per fissare le idee, che valga la prima alternativa. Ricoprendo $\mathbb{R}^n$ con una scacchiera di lato $\delta > (2nP(E,\mathbb{R}^n))^{1/(n-1)}$ ed usando la disuguaglianza $|E\cap Q|\leqslant n\delta P(E,Q)$ che segue da (1.5.4) si ottiene

$$|E|\leqslant n\delta P(E,\mathbb{R}^n).$$

Facendo tendere δ a $\Big(2nP(E,\mathbb{R}^n)\Big)^{1/(n-1)}$ si ottiene la diseguaglianza desiderata con $\gamma_n=(2n^n)^{1/(n-1)}$.

□

In problemi variazionali geometrici, spesso si vuole approssimare un insieme E con insiemi regolari. Come dimostreremo in seguito, questo e possibile nel caso in cui E ha perimetro finito.

Teorema 1.82. *Sia E un insieme di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Allora esiste una successione (E_h) di insiemi aperti in $\mathbb{R}^n$ con frontiera regolare, convergente in misura ad E e tali che*

$$P(E_h,\mathbb{R}^n)=P(E,\mathbb{R}^n).$$

Dimostrazione. Utilizzando la diseguaglianza isoperimetrica, si ottiene che uno tra E e $\mathbb{R}^n \setminus E$ hanno misura finita. Per il punto (iv) nella Proposizione 1.30, sostituendo eventualmente E con $\mathbb{R}^n \setminus E$, possiamo assumere che $|E| < \infty$. Sia (ε_k) una successione infinitesima e denotiamo con $u_k := \chi_E * \rho_{\varepsilon_k}$. Dato che $\chi_E \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ ed utilizzando l'Osservazione 1.22 si ottiene che le funzioni $u_k := \chi_E * \rho_{\varepsilon_k} \to \chi_E$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre soddisfano

$$\lim_{k\to\infty} |Du_k|(\mathbb{R}^n) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^n) = P(E, \mathbb{R}^n).$$

Denotando con F_t^k l'insieme di livello $\{u_k > t\}$. Usando la formula di coarea per funzioni BV si ha

$$\begin{aligned} P(E, \mathbb{R}^n) &= \lim_{k\to\infty} |Du_k|(\mathbb{R}^n) = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 P(F_t^k, \mathbb{R}^n)\, dt \\ &\geqslant \int_0^1 \liminf_{k\to\infty} P(F_t^k, \mathbb{R}^n)\, dt \end{aligned}$$

Fissato k, per il Teorema di Sard gli insiemi F_t^k hanno frontiera regolare per $\mathcal{L}$-q.o t. Quindi esiste $t \in (0,1)$ tale che tutti gli insiemi F_t^k hanno frontiera regolare e tale che

$$L := \liminf_{k\to\infty} P(F_t^k, \mathbb{R}^n) \leqslant P(E, \mathbb{R}^n).$$

Sia $E^h = F_t^{k_h}$ una sottosuccessione tale che $\lim_h P(E_h, \mathbb{R}^n) = L$. Utilizzando la diseguaglianza di Chebychev si ottiene

$$|E_h \setminus E| \leqslant \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |u_{k_h} - u|\, dx, \qquad |E_h \setminus E| \leqslant \frac{1}{1-t} \int_{\mathbb{R}^n} |u_{k_h} - \chi_E|\, dx.$$

Quindi (E_h) converge ad E in misura. La semicontinuità inferiore del perimetro implica che $L \leqslant P(E_h, \mathbb{R}^n)$, da cui $L = P(E, \mathbb{R}^n)$, il che conclude. □

Teorema di struttura

Caso $n = 1$

Teorema 1.83. *Sia E un insieme di perimetro finito in (a,b) tale che $|E \cap (a,b)| > 0$. Allora esiste un intero $p \geqslant 1$ e p intervalli disgiunti $(a_{2i-1}, a_{2i}) \subset \mathbb{R}$ tali che $E \cap (a,b)$ è equivalente all'unione dei J_i ed inoltre si ha*

$$P(E, (a,b)) = \#(\{i \in (1, \dots, 2p) :\ a_i \in (a,b)\}).$$

Dimostrazione. Se $u \in \mathrm{BV}((a,b))$, allora esiste una costante c tale che $u(t) = c + Du((a,t))$ per $\mathcal{L}^1$-q.o. $t \in (a,b)$. Infatti, ponendo $v : u(t) - Du((a,t))$ ed utilizzando il Teorema di Fubini si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(t)\, Du((a,t))\, dt &= \iint \varphi'(t)\chi_{(0,t)}(s)\, dt\, dDu(s) = \int_a^b \int_s^b \varphi'(t)\chi_{(s,b)}(t)\, dt\, dDu(s) \\ &= -\int_a^b \varphi(s)\, dDu(s), \end{aligned}$$

per ogni $\varphi \in C^1((a,b))$, quindi si ottiene $Dv \equiv 0$, e quindi per il punto (i) nel Teorema 1.16 si ottiene che $u(t) - Du((a,t))$ è costante. Consideriamo ora $u = \chi_E$. Per quanto appena dimostrato $\chi_E(t) = c + Du((a,t))$. Dato $\chi_E \in \{0,1\}$, la misura Du si dimostra facilmente che Du non può avere una parte diffusa. Inoltre, la funzione $Du((a,t))$ ammette limite destro e limite sinistro in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ e quindi l'eventuale salto non può essere che 1. Sia $S = \{t \in (a,b) : \ |Du|(\{t\}) = 1\}$. Allora $\#(A) = |Du|((a,b))$. Osserviamo che la funzione $Du((a,t))$ è continua in $(a,b) \setminus A$ e quindi costante in tutte le componenti connesse di $(a,b) \setminus A$. Infine prendendo J_j come la chiusura di tutti gli intervalli in cui $Du((a,t))$ è uguale ad 1 si conclude. □

Caso $n > 1$

Utilizzando le diseguaglianze isoperimetriche vogliamo trovare delle stime a priori sul andamento di $|E \cap B(x,\rho)|$, $P(E, B(x,\rho))$ nei punti della frontiera ridotta.

Proposizione 1.84. *Sia E un insieme di perimetro finito in Ω, sia $x_0 \in \Omega$ e sia $\delta =$ dist(x_0, Ω). Allora si ha*

$$P(E \cap B(x_0,\rho)), \mathbb{R}^n) \leqslant P(E, \overline{B(x_0,\rho)}) + m'_+(\rho) \tag{1.5.8}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $x_0 = 0$. Denoteremo con $B_\rho := B(0,\rho)$ Dimostreremo la seguente diseguaglianza generale:

$$|Du|(\mathbb{R}^n) \leqslant |Du|(\overline{B(x_\rho)}) + \Big(\int_{B_\rho} |u(x)|\, dx\Big)'_+, \qquad \forall \rho \in (0,\delta),\ \forall u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n), \tag{1.5.9}$$

dove $u_\rho := u\chi_{B_\rho}$. Dato $\sigma \in (0, \delta - \rho)$, costruiamo $u^\sigma \in \mathrm{BV}(\Omega)$ con supporto in $\overline{B}_{\rho+\sigma}$ coincidente con u in B_ρ e tale che

$$|Du^\sigma|(\mathbb{R}^n) \leqslant |Du|(B_{\rho+\sigma}) + \sigma^{-1} \int_{B_{\rho+\sigma}\setminus B_\rho} |u(x)|\, dx. \tag{1.5.10}$$

Infatti, ponendo $u^\sigma(x) := u(x)\gamma_\sigma(|x|)$, dove

$$\gamma_\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \leqslant \rho, \\ 1 + \frac{\rho - t}{\sigma}, & \text{se } t \leqslant \rho, \\ 0, & \text{se } t \geqslant \rho + \sigma, \end{cases}$$

per il punto (ii) nella Proposizione 1.16 si ha $Du^\sigma = \gamma_\sigma(|x|)Du + u(x)\gamma'_\sigma(|x|)x/|x|\mathcal{L}^n$, dalla qualle si ottiene (1.5.10). Dato che (u^σ) converge a u_ρ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per $\sigma \downarrow 0$ ed utilizzando la (1.5.10) e la semicontinuità inferiore della variazione segue la c (1.5.9) □

Osservazione 1.85. Sottraendo ad ambo i membri in (1.5.8) $P(E, B(x_0,\rho))$, per la località del perimetro si ottiene

$$P(E \cap B(x_0,\rho), \partial B(x_0,\rho)) \leqslant m'(\rho) \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } \rho \in (0,\delta). \tag{1.5.11}$$

Osserviamo inoltre che utilizzando la stessa dimostrazione si ottiene un risultato analogo per $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: in tal caso si ottiene, per $\mathcal{L}^1$-q.o. $\rho \in (0,\delta)$ la funzione $u_\rho := u\chi_{B(x_0,\rho)} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$ e

$$|Du_\rho(\mathbb{R}^n)| \leqslant |Du|(B(x_0,\rho)) + \Big(\int_{B(x_0,\rho)} |u(y)|\, dy\Big)'_+.$$

Lemma 1.86. *Sia E un insieme di perimetro finito in Ω e sia $x_0 \in \mathcal{F}E$. Allora esiste $\rho_0 \in (0, dist(x_0, \partial\Omega))$ ed esistono le costanti positive α, β tali che*

$$P(E, B(x_0, \rho)) \leqslant \alpha\rho^{n-1} \qquad \forall\rho \in (0, \rho_0) \tag{1.5.12}$$

$$\min\{|E \cap B(x_0, \rho)|, |B(x_0, \rho) \setminus E|\} \geqslant \beta\rho^n \qquad \forall\rho \in (0, \rho_0) \tag{1.5.13}$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.83 non è restrittivo supporre che $n > 1$. Scegliamo $\rho_0 \in (0, \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega))$ tale che

$$P(E, B(x_0, \rho)) = |D\chi_E|(B(x_0, \rho)) \leqslant 2|D\chi_E(B(x_0, \rho))|,$$

per ogni $\rho \in (0, 2\rho)$. Consideriamo $\rho \in (0, 2\rho_0)$ tale che $E \cap B(x_0, \rho)$ è un insieme di perimetro finito e tale che valga la (1.5.11). Utilizzando la località del perimetro, $D\chi_{E_\rho}(\mathbb{R}^n) = 0$ e la (1.5.11) si ottiene

$$\begin{aligned} |D\chi_E(B(x_0, \rho))| \leqslant &= |D\chi_{E\cap B(x_0,\rho)}(B(x_0, \rho))| = |D\chi_{E\cap B(x_0,\rho)}(\partial B(x_0, \rho))| \\ &\leqslant P(E_\rho, \partial B(x_0, \rho)) \leqslant m'_+(\rho) \end{aligned}$$

otteniamo che

$$P(E, B(x_0, \rho)) \leqslant 2m'(\rho) \qquad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } \rho \in (0, 2\rho_0).$$

Per $\rho \in (0, \rho_0)$ integrando la diseguaglianza tra ρ e 2ρ otteniamo

$$P(E, B(x_0, \rho)) \leqslant \rho^{-1} \int_\rho^{2\rho} P(E, B(x_0, t))\, dt \leqslant \frac{2m'(2\rho)}{\rho} \leqslant 2^{n+1}\omega_n,$$

e questo dimostra (1.5.12).

Per dimostrare (1.5.13), osserviamo che utilizzando la Proposizione 1.84 per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $\rho \in (0, 2\rho_0)$ il perimetro di $E \cap B(x_0, \rho)$ si stima con $3m'(\rho)$. Applicando la diseguaglianza isoperimetrica a $E \cap B(x_0, \rho)$ otteniamo

$$\left(m^{1/n}\right)'(\rho) = \frac{1}{n} m^{(1-n)/n}(\rho) m'(\rho) \geqslant \frac{1}{3n} m^{(1-n)/n}(\rho) P(E, B(x_0, \rho)) \geqslant \gamma$$

per $\mathcal{L}^1$-q.o. $\rho \in (0, 2\rho_0)$ con $\gamma = \gamma_n^{1-1/n}/(3n)$. Quindi integrando otteniamo

$$m(\rho) \geqslant \gamma^n \rho^n \quad \forall\rho \in (0, 2\rho_0).$$

□

Teorema 1.87 (De Giorgi)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$-misurabile. Allora $\mathcal{F}E$ è numerabilmente $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile e $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Inoltre, per ogni $x_0 \in \mathcal{F}E$ valgono le seguenti:*

(i). $(E - x_0)/\rho$ converge localmente in misura in $\mathbb{R}^n$ al semispazio ortogonale ad $\nu_E(x_0)$ che contiene $\nu_E(x_0)$;

(ii). $\mathrm{Tan}^{n-1}(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E, x_0) = \mathcal{H}^{n-1}\nu_E^\perp(x_0)$ e quindi in particolare si ha

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{F}E \cap B(x_0, \rho))}{\omega_{n-1}\rho^{n-1}} = 1 \tag{1.5.14}$$

Dimostrazione. Siano $x_0 \in \mathcal{F}E$, $n > 1$, $\bar{\nu} := \nu(x_0)$, dove x_0 un punto di Lebesgue per ν_E, $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \bar{\nu}, x \rangle \geqslant 0\}$ e denotiamo con $E_\rho := (E - x_0)/\rho$.
Dato che $P(E_\rho, B(0,r)) = P(E, B(x_0, \rho r))/\rho^{n-1}$, utilizzando la (1.5.12) ed il Teorema 1.29 si ottiene che (E_ρ) è relativamente compatto rispetto alla topologia della locale convergenza in misura. Quindi per dimostrare la convergenza di (E_ρ) a H è sufficiente mostrare che ogni punto limite F coincide con H. Sia quindi E_{ρ_h} una successione convergente localmente in misura ad F. Allora per la Proposizione 1.25 si ha che $D\chi_{E_{\rho_h}}$ a $D\chi_F$ convergente debolmente* in misura in $\mathbb{R}^n$ per $h \to \infty$. Quindi utilizzando il punto (iii) nell'Osservazione 1.71 otteniamo che $|D\chi_{E_{\rho_h}}|$ converge debolmente* ad $|D\chi_F|$ ed inoltre si ha

$$D\chi_F = \bar{\nu}|D\chi_F|, \tag{1.5.15}$$

dove $\bar{\nu} := \nu(x_0)$. In particolare, $D\chi_F$ non ha nessuna componente nella direzione ortogonale a $\bar{\nu}$ ed inoltre $\langle D\chi_F, \bar{\nu} \rangle \geqslant 0$. Dato che per il punto (iii) della Proposizione 1.16 si ha

$$\nabla(\chi_F * \rho_\varepsilon) = D\chi_F * \rho_\varepsilon = \bar{\nu}(D\chi_F * \rho_\varepsilon),$$

otteniamo che $\chi_F * \rho_\varepsilon$ può essere rappresentato con $\gamma_\varepsilon(\langle x, \bar{\nu} \rangle)$ per delle opportuna famiglia di funzioni $\gamma_\varepsilon : \mathbb{R} \to [0,1]$ convergente puntualmente $\mathcal{L}^n$-quasi ovunque. Passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene

$$\chi_F(x) = \gamma(\langle x, \bar{\nu} \rangle) \qquad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^n,$$

per qualche $\gamma : \mathbb{R} \to [0,1]$ tale che $D\gamma \geqslant 0$. Dato che $\chi_F \in \{0,1\}$ si ha che esiste un insieme L di perimetro finito tale che $\gamma = \chi_L$. Quindi utilizzando che $D\gamma \geqslant 0$ ed il Teorema 1.83 un semipiano (c, ∞). Se c fosse strettamente positivo allora ponendo $d = c \wedge 1$ otteniamo

$$\lim_{h\to\infty} \frac{E \cap B(x_0, d\rho_h)}{\rho_h^n} = \lim_{h\to\infty} |E_{x_0,\rho_h} \cap B(0,d)| = |F \cap B(0,d)| = 0$$

il che contraddice la (1.5.13) e quindi $c \leqslant 0$. Per un argomento simmetrico c non può essere strettamente negativo, e quindi $c = 0$ e $F = H$.

Dato che $\operatorname{Tan}(D\chi_E, x_0) = \nu\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial H$, per l'Osservazione 1.71 si ha

$$\operatorname{Tan}^{n-1}(|D\chi_E|, x_0) = \mathcal{H}^k \llcorner \partial H. \tag{1.5.16}$$

Utilizzando quindi il Teorema 1.74 si ottiene la rettificabilità di $\mathcal{F}E$ e la coincidenza di $|D\chi_E|$ con $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$. Sostituendo $|D\chi_E|$ con $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$ in (1.5.16) si ottiene il punto (ii) del teorema. Infine l'eguaglianza (1.5.14) segue dall'Osservazione 1.72. $\square$

Teorema 1.88. *Sia E un insieme di perimetro finito. Allora si ha*

$$\mathcal{F}E \cap \Omega \subset E^{1/2} \subset \partial^* E \quad e \quad \mathcal{H}^{n-1}\Big(\Omega \setminus (E^0 \cup \mathcal{F}E \cup E^1)\Big) = 0$$

Dimostrazione. Dato che per il Teorema di Struttura di De Giorgi, $(E - x)/\rho$ converge al semispazio ortogonale ad $\nu_E(x)$ che contiene $\nu_E(x)$, si ottiene $\mathcal{F}E \subset E^{1/2}$. Sia $\alpha(\rho) = |E \cap B(x,\rho)|/|B(x,\rho)|$. Osserviamo che se $P(E, B(x,\rho)) = o(\rho^{n-1})$, allora $x \in E^0 \cup E^1$.

Infatti, indicando con $Q_\rho(x)$ i cubi di lato ρ centrati in x, si ha $P(E, Q_\rho(x)) = o(\rho^{n-1})$, quindi per la diseguaglianza isoperimetrica locale si ha

$$\lim_{\rho \to 0^+} \min \left\{ \frac{|E \cap Q_\rho(x)|}{|Q_\rho|}, \frac{|E \setminus Q_\rho(x)|}{|Q_\rho|} \right\} = 0.$$

Allora tutti i punti limite della funzione

$$\alpha(\rho) := \frac{|E \cap Q_\rho(x)|}{|Q_\rho|}$$

per $\rho \to 0^+$ appartengono a $\{0, 1\}$, e quindi per la continuità $\alpha(\rho)$ converge a 0 oppure a 1. Inoltre dato che $P(E, B(x, \rho)) = \mathcal{H}^{n-1}(\mathcal{F}E \cap B(x, \rho))$, allora $\partial_* E$ è contenuto nel insieme dei punti x in cui $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$ ha densità $(n-1)$-dimensionale strettamente positiva. Infine dato che $\mathcal{H}^k$-quasi ogni punto di $\mathcal{F}E$ soddisfa questa proprietà si ottiene la tesi.

$\square$

2

DIMENSIONE INFINITA

Questo capitolo è dedicato alla generalizzazione delle funzioni a variazione limitata in spazi di Wiener. Una tale generalizzazione è molto importante, in quanto le funzioni a variazione limitata sono uno strumento particolarmente utile e flessibile, inoltre in molte applicazioni rappresentano l'ambiente ideale in cui lavorare.

Questo capitolo è organizzato nel seguente modo: nella prima parte introdurremo gli spazi di Wiener e le loro proprietà fondamentali; nella seconda parte discuteremo degli spazi di Sobolev; infine nella terza parte parleremo delle funzioni a variazione limitata in spazi di Wiener e di una generalizzazione del celebre Teorema di Struttura di De Giorgi.

2.1 MISURE GAUSSIANE E SPAZI DI WIENER

Non è difficile dimostrare che non esiste una analogo della misura di Lebesgue in uno spazio vettoriale di dimensione infinita. Per molteplici motivi in un contesto infinito-dimensionale il sostituto più naturale della misura di Lebesgue sono le misure Gaussiane.

2.1.1 *Richiami*

Sia X uno spazio di Banach. Denoteremo con X^* il suo duale topologico i.e. lo spazio di tutti gli funzionali lineari e continui su X e denoteremo con X' il suo duale algebrico i.e. lo spazio di tutti i funzionali lineari su X. Ricordiamo che la σ-algebra generata da una famiglia di funzioni $\mathcal{A}$ è la minima σ-algebra che rende tutte le funzioni di $\mathcal{A}$ misurabili. Denoteremo con $\mathcal{E}(X)$ la σ-algebra generata da tutti i funzionali lineari continui su X e denoteremo con $\mathcal{B}(X)$ la σ-algebra di Borel. Chiaramente $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{B}(X)$. In generale non vale l'uguaglianza.

Sia T un insieme con una relazione d'ordine filtrante e sia $(\mu_\alpha)_{\alpha\in T}$ una famiglia monotona di misure (i.e. se $\alpha \leqslant \beta$ allora $\mu_\alpha \leqslant \mu_\beta$) su uno spazio metrico. Allora la funzione d'insieme $\mu(A) := \sup_{\alpha\in T} \mu_\alpha(A)$ è una misura. Infatti, per com'è stata definita, è facile vedere che μ è σ-subadditiva. Per dimostrare la σ-additività su $\mathcal{B}(X)$ è sufficiente verificare il criterio di Caratheòdory. Siano quindi A, B due insiemi disgiunti $\varepsilon > 0$ e siano $\alpha, \beta \in T$ tali che $\mu_\alpha(A) > \mu(A) - \varepsilon$ e $\mu_\beta(B) > \mu(B) - \varepsilon$. Allora scegliendo $\eta > \alpha, \beta$ si ottiene

$$\mu(A) + \mu(B) - 2\varepsilon \leqslant \mu_\eta(A) + \mu_\eta(B) \leqslant \mu(A \cup B),$$

e quindi per l'arbitrarietà di ε si ottiene quanto voluto.

Ricordiamo inoltre che la trasformata di Fourier di una misura di Borel finita γ è una mappa $\tilde{\gamma} : X^* \to \mathbb{C}$ definita tramite la formula

$$\tilde{\gamma}(f) = \int \exp(if(x))\, d\gamma(x).$$

Proposizione 2.1. *Se X è uno spazio di Banach separabile, allora le σ-algebre $\mathcal{B}(X)$e $\mathcal{E}(X)$ coincidono.*

Dimostrazione. Fissiamo $\{x_j\}$ un denso numerabile in X. Dato che $\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{B}(X)$ è sufficiente dimostrare l'altra inclusione. Osserviamo che utilizzando il teorema di Hahn-Banach e possibile costruire una successione $\{x_j^*\} \subset X^*$ tale che separa i punti, $\|x_j^*\|_* = 1$ ed inoltre tale che vale $\langle x_j^*, x_j\rangle = \|x_j\|$. Osserviamo che

$$\sup_j \Big\{ \langle x_j^*, x\rangle \Big\} = \|x\|.$$

Infatti se x_n è tale che $\|x - x_n\| \leqslant \varepsilon$, allora si ha

$$\sup_j \{\langle x_j^*, x\rangle\} \geqslant \langle x_j^*, x\rangle \geqslant \langle x_j^*, x_j\rangle - \varepsilon \geqslant \|x\| - 2\varepsilon,$$

e quindi per l'arbitrarietà di ε si ottiene una diseguaglianza. L'altra diseguaglianza segue facilmente dal fatto che $\|x_j^*\| = 1$. Infine, dato che $B(0,1) = \Big\{x : \sup_j x_j^*(x) < 1\Big\}$ si ottiene che $B(0,1) \in \mathcal{E}(X)$ e quindi ogni aperto $U \in \mathcal{E}(X)$. □

Proposizione 2.2. *Sia X uno spazio di Banach. Allora la trasformata di Fourier identifica univocamente le misure finite su $(X, \mathcal{E}(X))$ i.e. se $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$, allora $\mu = \nu$.*

Dimostrazione. Utilizzando la linearità della mappa $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ è sufficiente dimostrare l'implicazione: se $\tilde{\mu} = 0$, allora $\mu = 0$.

Le misure finite su $\mathbb{R}^n$ sono univocamente identificate dalla trasformata di Fourier. Infatti, è noto dal Teorema di Levy in $\mathbb{R}^n$ (v. [37]) che la trasformata di Fourier identifica univocamente le misure finite positive su $\mathbb{R}^n$. In generale, se μ è una misura con segno tale che $\tilde{\mu} = 0$, allora per la linearità della trasformata si ha $\tilde{\mu}^+ = \tilde{\mu}^-$, quindi $\mu^+ = \mu^-$, e quindi si ha $\mu = 0$. Da cui si ottiene che $f_{\#}\gamma = 0$ e quindi per ogni insieme Boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$, si ha $\gamma\Big(f^{-1}(B)\Big) = 0$. Quindi, per ogni insieme cilindrico C, $\gamma(C) = 0$ e quindi $\gamma = 0$. □

Una conseguenza diretta nel caso in cui X sia separabile è che la trasformata di Fourier identifica univocamente la misura.

Ricordiamo che in uno spazio topologico E una misura μ si dice regolare se per ogni insieme misurabile A esiste un insieme chiuso C_ε tale che $\mu(A \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$. Inoltre, una misura μ si dice di Radon se μ è localmente finita e per ogni insieme misurabile $A \subset E$ esiste un insieme compatto K_ε tale che $\mu(A \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Chiaramente una misura di Radon è una misura regolare. Se E è uno spazio metrico, allora vale il seguente teorema la cui dimostrazione si può trovare in [16] oppure in [8].

Teorema 2.3. *Se μ è una misura finita in uno metrico E, allora μ è regolare. Inoltre, se E è completo e separabile, allora la misura μ è di Radon.*

Integrale di Bochner

Introduciamo ora senza dimostrazioni alcuni fatti sull'integrale di Bochner. L'integrale di Bochner è l'estensione più naturale dell'integrazione per mappe a valori in uno spazio di Banach. Una trattazione completa si può trovare in [17, 18].

Definizione 2.4. Siano $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura, X uno spazio di Banach separabile e sia $f = \sum_{i=0}^{n} x_i \chi_{E_i}$ una funzione semplice. Definiamo

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=0}^{n} x_i \mu(E_i).$$

Si dimostra facilmente che $\int f \, d\mu$ è indipendente dalla scelta di $\{E_i\}$.

Definizione 2.5. Siano $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio misurato, X uno spazio di Banach separabile. Una mappa misurabile $f : \Omega \to X$ viene chiamata μ-Bochner integrabile se esiste una successione di funzioni semplici $\{f_n\}$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\|_X = 0. \tag{2.1.1}$$

Inoltre, per $E \in \mathcal{A}$ definiamo

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu \qquad \text{in } X, \tag{2.1.2}$$

Si verifica che il limite in (2.1.2) esiste ed è indipendente dalla scelta delle funzioni semplici approssimanti $\{f_n\}$.

Una caratterizzazione più precisa delle funzioni Bochner integrabili è data dal seguente teorema:

Teorema 2.6. *Una funzione misurabile $f : \Omega \to X$ è μ-Bochner integrabile se solo se vale*

$$\int_{\Omega} \|f\|_X \, d\mu < \infty.$$

Teorema 2.7. *Siano f una mappa μ-Bochner integrabile. Allora valgono le seguenti*

(i). per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $\mu(E) < \delta$, allora si ha $\int_E \|f \, d\mu\| \leqslant \varepsilon$;

(ii). $\| \int_E f \, d\mu\| \leqslant \int_E \|f\| \, d\mu$;

(iii). Se $\{E_i\}$ è una famiglia di insiemi mutuamente disgiunti ed $E = \cup_i E_i$, allora si ha

$$\sum_i \int_{E_i} f = \int_E f \, d\mu;$$

(iv). se f, g sono due funzioni μ-Bochner integrabili tali che $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$, allora si ha $f = g$ μ-quasi ovunque.

Teorema 2.8. *Sia $T : X \to Y$ una operatore chiuso e sia f una mappa μ-Bochner integrabile. Se Tf è Bochner integrabile, allora si ha*

$$T\Big(\int f \, d\mu \Big) = \int Tf \, d\mu.$$

Diamo ora l'equivalente del Teorema di convergenza dominata di Lebesgue nel ambito del integrazione di Bochner.

Teorema 2.9. *Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finita e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni μ-Bochner integrabili a valori in uno spazio di Banach X tali che $f_n \to f$ in misura. Se esiste una funzione g integrabile tale che $\|f_n\| \leqslant g$, allora f è μ-Bochner integrabile, ed inoltre si ha $\lim_n \int \|f_n - f\| \, d\mu = 0$. In particolare, si ha $\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.*

Spazi di Orlicz

Definizione 2.10. Diremo che Φ è una N-funzione se esiste una funzione continua, positiva e strettamente crescente ϕ tale che $\phi(t) = 0$ se solo se $t = 0$, $\phi(t) \to \infty$ per $t \to \infty$ ed inoltre

$$\Phi(x) = \int_0^{|x|} \phi(t) \, dt.$$

È facile verificare che la funzione Φ è convessa e soddisfa le seguenti proprietà:

(i). $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(t) \to \infty$ per $t \to \infty$;

(ii). $t^{-1}\Phi(t) \to \infty$ per $t \to \infty$;

(iii). $t^{-1}\Phi(t) \to 0$ per $t \to 0$.

Definizione 2.11. Sia Φ una N-funzione. Poniamo $\psi := \phi^{-1}$. La funzione Ψ definita come

$$\Psi(y) := \int_0^{|y|} \psi(t) \, dt$$

viene chiamata la funzione complementare di Φ.

È facile verificare che ψ soddisfa le ipotesi di ϕ nella Definizione 2.10, e quindi Ψ è una N-funzione.

Osservazione 2.12. La funzione Ψ coincide con la trasformata di Legendre su $[0, \infty)$. Infatti, sia Φ^* la trasformata di Legendre e supponiamo inoltre che la funzione ϕ sia differenziabile e $y \geqslant 0$, allora con semplici calcoli si ottiene che $y = \phi^{-1}(x)$, da cui si ha

$$\Phi^*(y) = y\phi^{-1}(y) - \int_0^{\phi^{-1}(y)} \phi(t) \, dt,$$

e quindi differenziando si ottiene che $\frac{d}{dy}\Phi^* = \phi^{-1}$. Il caso generale segue approssimando ϕ uniformemente con delle funzioni di classe C^1 strettamente crescenti ed osservando che anche ϕ^{-1} viene approssimata uniformemente.

Proposizione 2.13 (Diseguaglianza di Young)**.** *Sia Φ una N-funzione e sia Ψ la sua funzione complementare. Allora si ha*

$$|xy| \leqslant \Phi(x) + \Psi(y).$$

Dimostrazione. Utilizzando la parità di Φ e Ψ possiamo assumere senza perdita di generalità che $y, x \geqslant 0$. Utilizzando la definizione di trasformata di Legendre, si vede facilmente che

$$xy \leqslant \Phi(x) + \Phi^*(y) = \Phi(x) + \Psi(y),$$

il che conclude la dimostrazione. □

Definizione 2.14. Sia ϕ una N-funzione. Definiamo $\tilde{L}^\phi(\gamma)$ come lo spazio delle funzioni a valori reali tali che

$$\int \phi(\alpha|u(x)|)\, d\gamma(x) < \infty,$$

per qualche $\alpha > 0$.

La spazio di Orlicz è l'insieme delle classi di equivalenza in $\tilde{L}^\phi(\gamma)$ ottenute identificando le funzioni che differiscono in un insieme di misura nulla.

Definizione 2.15. Sullo spazio di Orlicz $L^\phi(\gamma)$ definiamo la norma

$$\|f\|_{L^\phi(\gamma)} := \inf\left\{k > 0 : \int \Phi(k^{-1}|u(x)|) \leqslant 1\right\}.$$

Verifichiamo la buona definizione della norma $\|\cdot\|$. Sia $u \neq 0$ in $L^\phi(\gamma)$ e sia $A := \{|u| > \varepsilon\}$. Dato che $\Phi(t) \to \infty$ per $t \to \infty$, allora esiste t_0 tale che si abbia

$$\Phi(t_0^{-1}|u|) \geqslant \Phi(t_0^{-1}\varepsilon) > \gamma(A)^{-1},$$

e quindi

$$\int \Phi(t_0^{-1}|u|) \geqslant \int_A \Phi(t_0^{-1}\varepsilon) > 1$$

il che contraddice l'ipotesi. Inoltre con argomenti simili si dimostra che $\|\alpha^{-1}u\|_{L^\phi(\gamma)} = 1$ dove $\alpha = \|u\|_{L^\phi(\gamma)}$.

Dimostriamo ora la subadditività della norma. Siano $u, v \in L^\phi(\gamma)$ e siano $\alpha = \|u\|_{L^\phi(\gamma)}$ e $\beta = \|v\|_{L^\phi(\gamma)}$. Allora utilizzando la convessità di Φ si ha

$$\begin{aligned}\int \Phi\Big(\frac{|u+v|}{\alpha+\beta}\Big)\, d\gamma &\leqslant \int \Phi\Big(\frac{\alpha(\alpha^{-1}|u|) + \beta(\beta^{-1}|v|)}{\alpha+\beta}\Big)\, d\gamma \\ &\leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int \Phi\Big(\alpha^{-1}|u|\Big)\, d\gamma + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\int \Phi\Big(\beta^{-1}|v|\Big)\, d\gamma \\ &\leqslant \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Osserviamo inoltre che $f \in L^\phi$ se solo se $\|f\|_{L^\phi(\gamma)} < \infty$.

Osservazione 2.16. Supponiamo che $u_n \to u$ in $L^\phi(\gamma)$, allora $u_n \to u$ in $L^1(\gamma)$. Infatti, utilizzando la convessità di Φ e la diseguaglianza di Jensen si ottiene

$$\Phi\Big(\int |u_n - u|\, d\gamma\Big) \int \Phi(|u_n - u|)\, d\gamma \leqslant k_n \int \Phi(k_n^{-1}|u_n - u|)\, d\gamma \leqslant k_n,$$

dove $k_n = \|u - u_n\|_{L^\phi(\gamma)}$.

Teorema 2.17. *Sia ϕ una N-funzione. Allora lo spazio Orlicz $L^\phi(\gamma)$ è uno spazio di Banach contenuto in $L^1(\gamma)$.*

Dimostrazione. Verifichiamo che $L^\phi(\gamma) \subset L^1(\gamma)$. Dato che $t^{-1}\Phi(t) \to \infty$ per $t \to \infty$, allora esiste un $t_0 > 0$ tale che $\Phi(t) \geqslant t$ per ogni $t \geqslant t_0$ e quindi ponendo $\alpha = \|u\|_{L^\phi(\gamma)}$ si ha

$$\begin{aligned}\int |u|\, d\gamma &\leqslant \int_{\{u \leqslant t_o\}} |u|\, d\gamma + \int_{\{u > t_o\}} |u|\, d\gamma \leqslant \int_{\{u \leqslant t_o\}} |u|\, d\gamma + \alpha \int_{\{u > t_o\}} \Phi(\alpha^{-1}|u|)\, d\gamma \\ &\leqslant \int_{\{u \leqslant t_o\}} |u|\, d\gamma + \|u\|_{L^\phi(\gamma)} < \infty.\end{aligned}$$

Dimostriamo ora la completezza di $L^\phi(\gamma)$. Sia quindi (u_n) una successione di Cauchy in $L^\phi(\gamma)$. Allora per l'Osservazione 2.16 esiste una sottosuccessione in u_{n_k} convergente puntualmente per γ-quasi ovunque ad una funzione u e quindi possiamo assumere senza perdita di generalità la convergenza puntuale γ-quasi ovunque. Sia $\beta > 0$ tale che $\beta > \sup_n \|u_n\|_{L^\phi(\gamma)}$. Allora utilizzando la convessità di Φ ed il Lemma di Fatou si ha

$$\begin{aligned}\int \Phi(\beta^{-1}|u|)\,d\gamma &\leqslant \int \Phi\Big((2\beta)^{-1}|u_n-u|\Big)\,d\gamma + \int \Phi\Big((2\beta)^{-1}|u_n|\Big)\,d\gamma \\ &\leqslant 1 + \liminf_{m\to\infty}\int \Phi\Big((2\beta)^{-1}|u_n-u_m|\Big)\,d\gamma \leqslant 2,\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

e quindi $u \in L^\phi(\gamma)$. La convergenza della successione (u_n) ad u si dimostra con argomenti simili a quelli usati in (2.1.4). □

Proposizione 2.18 (Diseguaglianza di Hölder)**.** *Siano u, v due funzioni misurabili, allora*

$$\int |u||v|\,d\gamma \leqslant 2\|u\|_{L^\Phi}\|v\|_{L^\Psi}.$$

Dimostrazione. Siano $\alpha = \|u\|_{L^\Phi}$ e $\beta = \|v\|_{L^\Psi}$. Allora utilizzando la diseguaglianza di Young si ha

$$\int |u||v|\,d\gamma \leqslant \frac{1}{\alpha\cdot\beta}\int \Big(\Phi(\alpha^{-1}|u|) + \Psi(\beta^{-1}|v|)\Big)\,d\gamma \leqslant 2\|u\|_{L^\Phi}\|v\|_{L^\Psi}.$$

□

In seguito considereremo lo spazio di Orlicz definito da $\phi = \sqrt{\log(1+s)}$. In questo caso particolare la funzione Φ sarà denotata con $A_{1/2}$ e lo spazio di Orlicz associato con $L\log^{1/2}L$. Osserviamo inoltre che la funzione complementare di $A_{1/2}$ è definita da $\psi = e^{t^2} - 1$. La notazione $L\log^{1/2}L$ viene giustificata dalla seguente proposizione:

Proposizione 2.19. *La funzione u appartiene a $L\log^{1/2}L$ se solo se*

$$\int |u|((\log|u|)^+)^{1/2}d\gamma < \infty.$$

Dimostrazione. Utilizzando il Teorema di De L'Hôpital è facile dimostrare che

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t\log^{\frac12}(t)} = 1,$$

dove $\Phi(t) = \int_0^t \log^{\frac12}(1+s)\,ds$, e quindi esistono delle costanti positive M, M_0 e M_1 tali che

$$M_0\int_{\{|u|>M\}}|u|\log^{\frac12}(|u|)\,d\mu \leqslant \int_{\{|u|>M\}}\Phi(|u|)\,d\mu \leqslant M_1\int_{\{|u|>M\}}|u|\log^{\frac12}(|u|)\,d\mu.$$

Utilizzando quest'ultima si ottiene

$$\int |u|((\log|u|)^+)^{1/2} \leqslant C_1\int \Phi(|u|)\,d\mu + C_2 \leqslant C_3\int |u|((\log|u|)^+)^{1/2}\,d\mu + C_4,$$

dove C_1, C_2, C_3 e C_4 sono opportune constanti positive. □

2.1.2 *Misure Gaussiane*

Definizione 2.20. Una misura di probabilità γ su $\mathbb{R}$ viene chiamata Gaussiana se γ è la delta di Dirac δ_a per qualche punto $a \in \mathbb{R}$ oppure se è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue ed ha come densità

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

I parametri a e σ^2 sono rispettivamente la media e la varianza di γ poiché sono giustificati da

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int x e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \, dx = a, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int (x-a)^2 e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \, dx = \sigma^2. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Inoltre, la trasformata di una misura Gaussiana su $\mathbb{R}$ è

$$\tilde{\gamma}(t) = \exp\Big(ia - \frac{t^2}{2}\sigma^2\Big).$$

Definizione 2.21. Una misura di probabilità γ su $(X, \mathcal{E}(X))$ dove X uno spazio di Banach si dice Gaussiana se per ogni f in X^*, la misura immagine $f_\# \gamma$ è una misura Gaussiana su $\mathbb{R}$. Inoltre, si dice centrata se tutte le misure $f_\# \gamma$ hanno media nulla.

Osservazione 2.22. Sia γ una misura Gaussiana su $(X, \mathcal{E}(X))$ e sia $f \in X^*$. Con calcoli elementari si dimostra che $f_\# \gamma$ ha media

$$a := \int f \, d\gamma$$

e varianza

$$\sigma^2 := \int (f-a)^2 \, d\gamma.$$

Teorema 2.23. *Una misura γ su uno spazio di Banach X è Gaussiana se solo se la sua trasformata di Fourier ha la seguente forma*

$$\tilde{\gamma}(f) = \exp(iL(f) - B(f,f)), \tag{2.1.6}$$

dove L è un funzionale lineare su X^* e B è una forma quadratica bilineare, simmetrica e non-negativa.

Dimostrazione. Poniamo

$$L(f) := \int f \, d\gamma, \qquad \forall f \in X^*$$

e

$$B(f,g) := \int_X \Big(f - L(f)\Big)\Big(g - L(g)\Big) \, d\gamma, \qquad \forall f, g \in X^*.$$

Per definizione, L è un funzionale lineare su X^* e B è una forma simmetrica e non-negativa su X^*. Per la formula di cambiamento di variabili e le osservazioni fatte dopo la Definizione 2.20, si ottiene la formula (2.1.6).

Supponiamo ora che γ sia una misura tale che la sua trasformata di Fourier sia data dalla formula (2.1.6). Per la formula di cambiamento di variabili si ha

$$\int \exp(iyt)\, d(f_{\#}\gamma)(t) = \int \exp(iyf(x))\, d\gamma(x) = \exp\Big(iyL(f) - y^2/2B(f,f)\Big),$$

quindi per ogni $f \in X^*$ abbiamo dimostrato che $f_{\#}\gamma$ è una misura Gaussiana e quindi γ è una misura Gaussiana. □

Teorema 2.24 (di Fernique)**.** *Siano γ una misura su uno spazio di Banach X e q una seminorma misurabile. Allora esiste una costante $\alpha > 0$ tale che* $\exp(\alpha q(x)^2) \in L^1(\gamma)$*.*

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente il caso in cui γ sia una misura Gaussiana centrata.

Sia $\tau > 0$ tale che $c := \gamma(\{q \leqslant \tau\}) > 3/4$. Utilizzando il Corollario 2.31 si ha

$$\begin{aligned}\gamma(\{q \leqslant \tau\})\gamma(\{q > t\}) &= \iint \chi_{\{q\leqslant\tau\}}(x)\chi_{\{q>t\}}(y)\, d\gamma(x)\, d\gamma(y)\\ &= \iint \chi_{\{q\leqslant\tau\}}((u+v)/\sqrt{2})\chi_{\{q>t\}}((u-v)/\sqrt{2})\, d\gamma(u)\, d\gamma(v).\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Dato che

$$q(v) \geqslant \frac{q(u+v) - q(u-v)}{2}, \quad q(u) \geqslant \frac{q(u+v) - q(v-u)}{2},$$

allora per ogni $u \in \{q > t\}$, $v \in \{q \leqslant \tau\}$ si ha

$$q(u) \geqslant \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}, \quad q(v) \geqslant \frac{t-\tau}{\sqrt{2}},$$

e quindi

$$\gamma(\{q \leqslant \tau\})\gamma(\{q > t\}) \leqslant \gamma\Big(\Big\{u \geqslant \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\Big\}\Big)^2. \tag{2.1.8}$$

Consideriamo la successione definita per ricorrenza, $t_n = \tau + \sqrt{2}t_{n-1}$ e poniamo $p_n = \gamma(\{q > t\})/c$. Risolvendo l'equazione definita per ricorrenza si ha

$$t_n = \tau(1+\sqrt{2})((\sqrt{2})^{n+1} - 1),$$

ed inoltre esiste $D > 0$ tale che

$$t_n < D(\sqrt{2})^n. \tag{2.1.9}$$

L'equazione (2.1.8) si può riscrivere come $p_n \leqslant p_{n-1}^2$, il che conclude.

$$p_n = \gamma(q > t_n) \leqslant c\Big(\frac{1-c}{c}\Big)^{2^n} \leqslant 3^{-2^n}. \tag{2.1.10}$$

Utilizzando la (2.1.10) e la (2.1.9) si ottiene

$$\begin{aligned}\int \exp(\alpha q^2)\, d\gamma &\leqslant \int_{\{q\leqslant\tau\}} \exp(\alpha q^2)\, d\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\alpha t_n^2)\gamma(\{q \geqslant t_n\})\\ &\leqslant c\exp(\alpha\tau^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\alpha t_n^2)3^{-2^n} \qquad (2.1.11)\\ &\leqslant c\exp(\alpha\tau^2) + \sum_{n=0}^{\infty} \exp(2^n(\alpha D - \log(3)).\end{aligned}$$

Quindi prendendo α abbastanza piccolo si ottiene al convergenza di (2.1.11) e quindi la tesi per misure Gaussiane centrate. Consideriamo ora il caso generale. Siano γ_1 la misura immagine di γ tramite la mappa $x \mapsto -x$ e $\gamma_0 := \gamma_1 * \gamma$. È facile vedere che γ_0 è una misura Gaussiana centrata e quindi esiste una costante α_0 tale che

$$\exp(\alpha_0 q(x-y)^2)\,\gamma(x)\,d\gamma(y) < \infty.$$

Da cui si ottiene che esiste y tale che $\exp(\cdot - y) \in L^1(\gamma)$. Per la diseguaglianza di Jensen si ha

$$q(x)^2 \leqslant (q(x-y)+q(y))^2 \leqslant 2q(x-y)^2 + 2q(y)^2$$

e quindi prendendo $\alpha = \alpha_0/2$ si ottiene l'integrabilità di $\exp(\alpha q(x)^2)$. □

Osservazione 2.25. Utilizzando il Teorema di Fernique si ottiene facilmente che una misura Gaussiana γ ha momenti finiti di ogni ordine $p < \infty$, i.e. la funzione $\|x\|_X^p$ è integrabile secondo γ per ogni $p < \infty$.

Per alcuni difficoltà tecniche, in quanto segue anche quando non sarà specificato supporremo sempre che lo spazio X sia uno spazio di Banach separabile. Osserviamo inoltre che questa ipotesi non è restrittiva nel caso in cui la misura Gaussiana γ è di Radon. Infatti, sia K_n una successione di insiemi compatti tale che $\gamma(X \setminus K_n) \leqslant 1/n$. Dato che K_n è separabile si dimostra facilmente che

$$X_0 := \overline{\operatorname{span} \bigcup_n K_n}$$

è separabile, ed inoltre $\gamma(X_0) = 1$.

Definizione 2.26. Sia γ una misura Gaussiana su uno spazio di Banach separabile X. Chiameremo media di γ l'elemento di X dato da

$$a_\gamma := \int_X x\,d\gamma(x),$$

dove l'integrazione è intesa nel senso di Bochner. Inoltre, definiamo l'operatore di covarianza $R_\gamma : X^* \to X$ come

$$R_\gamma(g) := \int (x-a_\gamma)(g(x)-g(a_\gamma))\,d\gamma(x).$$

La mappa $R^* : X^* \to L^2(\gamma)$ è definita come $R^*x^*(x) = x^*(x)$. Inoltre, denoteremo con $\mathscr{H}$ la chiusura di $\{f - f(a_\gamma)\}$ in $L^2(\gamma)$. Lo spazio $\mathscr{H}$ dotato del prodotto scalare di $L^2(\gamma)$ viene chiamato il *nucleo riproduttivo* della misura γ. Definiamo $R : \mathscr{H} \to X$ tramite

$$R\hat{h} = \int (x-a_\gamma)\hat{h}(x)\,d\gamma(x), \qquad \forall \hat{h} \in \mathscr{H}. \tag{2.1.12}$$

Lo spazio $H(\gamma) = R\mathscr{H}$ viene chiamato lo spazio di Cameron-Martin e sarà dotato della norma

$$|h|_{H(\gamma)} := \sup\{f(h) : \ f \in X^* \text{ tale che } R_\gamma(f)(f) \leqslant 1\}.$$

La mappa $R : \mathscr{H} \to H(\gamma)$ è un isometria. Infatti, sia $\hat{h} \in \mathscr{H}$. Allora, per ogni $f \in X^*$ si ha

$$f\Big(\int (x-a_\gamma)\hat{h}(x)\,d\gamma(x)\Big) = \int (f(x)-f(a_\gamma))\hat{h}(x)\,d\gamma(x).$$

Utilizzando la densità di R^*X^* in $\mathscr{H}$ si ottiene quanto voluto.

Inoltre si ha $R_\gamma = RR^*$. Infatti se $f, g \in X^*$, allora

$$\langle f, R_\gamma(g)\rangle = f\Big(\int_X (x-a_\gamma)(g(x)-g(a_\gamma))\,d\gamma(x)\Big) = \langle R^*f, R^*g\rangle = \langle f, RR^*g\rangle.$$

Osservazione 2.27. Le mappe R, R^* e R_γ sono continue. Inoltre, R^* e R_γ sono compatte.

Infatti, sia $(f_n) \subset X^*$ una successione debolmente convergente ad f. Quindi per ogni $x \in X$ si ha $f_n(x)$ converge a $f(x)$ per $n \to \infty$ e $M := \sup \|f_n\|_{X^*} < \infty$. Notando inoltre che $|f_n(x-a_\gamma)| \leqslant M\|x-a_\gamma\|$ ed utilizzando il Teorema di Convergenza dominata di Lebesgue si ottiene la compattezza di R^*.

Dimostriamo ora la continuità di R. Sia $(\hat{h}_n)$ una successione convergente in $\mathscr{H}$. Per le proprietà del integrale di Bochner si ha

$$\|R(\hat{h})-R(\hat{h}_n)\|_X \leqslant \int_X \|x-a_\gamma\|_X |\hat{h}_n(x)-\hat{h}(x)|\,d\gamma \leqslant \|h-h_n\|_{L^2(\gamma)}\Big(\int_X \|x-a_\gamma\|_X^2\,d\gamma\Big)^{1/2},$$

da cui si ottiene quanto voluto.

Per semplicità di notazione denoteremo con

$$\sigma(f) := \sqrt{\int_X f(x)^2\,d\gamma(x)} \qquad \forall f \in \mathscr{H}.$$

In particolare, se $f \in X^*$ si ha

$$\sigma(f) := \sqrt{\int_X \Big(f(x)-f(a_\gamma)\Big)^2\,d\gamma(x)} \qquad \forall f \in X^*.$$

Osservazione 2.28. Lo spazio di Cameron-Martin è separabile. Infatti per quanto detto prima la mappa $R^* : X^* \to \mathscr{H}$ è compatta, e quindi dato che gli operatori compatti la chiusura di operatori aventi rango finito nella topologia forte, si ottiene la separabilità di R^*X^* e quindi di $\mathscr{H}$. Inoltre dato che $\mathscr{H}$ e $H(\gamma)$ sono isomorfi si ha anche la separabilità di H rispetto alla norma indotta da $|\cdot|_{H(\gamma)}$.

Teorema 2.29. *Sia γ una misura Gaussiana su X. Allora il supporto topologico di γ coincide con*

$$a_\gamma + \overline{H(\gamma)},$$

dove $\overline{H(\gamma)}$ e la chiusura di $H(\gamma)$ in X.

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdita di generalità che γ sia centrata e quindi $\overline{H(\gamma)}$ è un sottospazio lineare. Per semplicità poniamo $L = \overline{H(\gamma)}$. Supponiamo per assurdo che esista $x \in \operatorname{spt}(\gamma)$ tale che $x \notin L$. Per il teorema di Hahn-Banach esiste un funzionale lineare continuo tale che $f(x) = 1$ e $L \subset \ker(f)$. Dato che $x \in \operatorname{spt}(\gamma)$ si vede facilmente che $A := \int f^2\,d\gamma > 0$. Inoltre, per la definizione di $H(\gamma)$ si ha

$$h_0 = \int x f(x)\,d\gamma(x),$$

è contenuto in L, e quindi si ha

$$f(h_0) = f\Big(\int x f(x)\,d\gamma(x)\Big) = \int f(x)^2\,d\gamma(x),$$

il che contraddice l'ipotesi.

Supponiamo ora che esista $x \in L$ tale che $x \notin \mathrm{spt}(\gamma)$, quindi esiste un aperto V tale che $\gamma(V) = 0$. Inoltre, dato che per il Corollario 2.33 le misure $\gamma \sim \gamma_h$ con $h \in L$ si ottiene che ogni $h \in L$ non appartiene al supporto di γ e quindi $\gamma(L) = 0$, il che contraddice quanto dimostrato nella prima parte della dimostrazione poiché $\gamma(L) = 1$.

□

Proposizione 2.30. *Sia γ una misura Gaussiana su uno spazio di Banach separabile X e sia $A_\theta : X \times X \to X$ definita come $(x, y) \mapsto x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$. Allora γ è una misura Gaussiana centrata se solo se per tutti i θ la misura immagine di $\gamma \otimes \gamma$ tramite la mappa A_θ e uguale a γ.*

Dimostrazione. È facile dimostrare la tesi quando $X = \mathbb{R}$. Se γ una misura Gaussiana su X, con semplici calcoli si ha

$$\begin{aligned}\widetilde{A_\theta(\gamma)}(f) &= \iint \exp(i\cos(\theta)f(x) + i\sin(\theta)f(y))\, d\gamma(x)\, d\gamma(y)\\ &= \iint \exp(i\cos(\theta)\xi - i\sin(\theta)\zeta)\, d\gamma_f(\xi)\, d\gamma_f(\zeta),\end{aligned}$$

dove $\gamma_f := f_\# \gamma$. Dato che γ_f è una misura Gaussiana su $\mathbb{R}$ la tesi segue dal caso 1-dimensionale. □

In realtà vale un risultato più forte: non è necessario supporre che γ sia Gaussiana per dimostrare che se $A_{\theta\#}(\gamma \otimes \gamma) = \gamma$ implica che γ sia Gaussiana centrata. Una dimostrazione di questo fatto si può trovare in [6].

Corollario 2.31. *Denotiamo con ρ_θ la mappa definita come $\rho_\theta(x, y) := (x\cos(\theta) + y\sin(\theta), x\sin(\theta) - y\cos(\theta))$. Allora $\rho_{\theta\#}(\gamma \otimes \gamma) = \gamma \otimes \gamma$ se solo se γ è centrata.*

Dimostrazione. Se $\rho_{\theta\#}(\gamma \otimes \gamma) = \gamma \otimes \gamma$, allora utilizzando la Proposizione 2.30 è facile verificare che γ è centrata. L'altra implicazione si dimostra utilizzando la trasformata di Fourier. Infatti, dato che ogni $(X \times X)^* = X^* \oplus X^*$, la trasformata di Fourier di $f \circ \pi_1 + g \circ \pi_2$, dove $f, g \in X^*$e π_1 e π_2 sono le proiezioni sulla prima e sulla seconda coordinata rispettivamente, può essere calcolata come

$$\begin{aligned}(\widetilde{\rho_{\theta\#}\gamma \otimes} \gamma)(f + g) &= \int_{X \times X} \exp\Big(if(x\cos(\theta) + y\cos(\theta)) + ig(-x\sin(\theta) + y\cos(\theta))\Big)\\ &= \tilde{\gamma}(\cos(\theta)f - \sin(\theta)g)\tilde{\gamma}(\cos(\theta)f + \sin(\theta)g) = \tilde{\gamma}(f) \cdot \tilde{\gamma}(g).\end{aligned}$$

□

Proposizione 2.32. *Sia γ una misura Gaussiana su uno spazio di Banach separabile X e $g \in L^2(\gamma)$. Allora la misura ν avente come densità*

$$\rho(x) := \exp\Big(g(x) - \sigma(g)^2\Big)$$

rispetto a γ è una misura Gaussiana con trasformata di Fourier

$$\tilde{\nu}(f) = \exp\Big(iR_\gamma(g)(f) + if(a_\gamma) - \frac{1}{2}\sigma^2(f)\Big). \tag{2.1.13}$$

Dimostrazione. Per la formula di cambiamento di variabili è facile vedere che $\exp(|g|)$ è integrabile, e quindi $\nu = \rho\gamma$ è una misura finita. Poniamo

$$k := \exp\Big(if(a_\gamma) - \sigma^2(f)^2\Big)$$

e consideriamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita tramite

$$\varphi(z) := k \int_X \exp\Big(i(f(x) - f(a_\gamma) - zg(x))\Big)\, d\gamma(x).$$

Dato che $f - f(a_\gamma) - zg \in \mathscr{H}$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi(z) =& k \exp\Big(-\frac{1}{2}\int (f - f(a_\gamma) - zg(x))\Big)\, d\gamma(x)\\ =& k \exp\Big(-\frac{1}{2}\sigma(f)^2 - z^2\sigma(g)^2 + zR_\gamma(g)(f)\Big).\end{aligned}$$

Notiamo che φ ammette un estensione olomorfa nel piano complesso, e quindi $\varphi(z) \to \tilde{\nu}$ per $z \to i$. Inoltre, il limite della parte destra dell'uguaglianza coincide con la parte destra di (2.1.13). □

Corollario 2.33 (Formula di Cameron-Martin)**.** *Sia γ una misura Gaussiana su uno spazio di Banach X. Poniamo per ogni $h \in H(\gamma)$ $\gamma_h(A) = \gamma(A - h)$. Allora per ogni $h \in H(\gamma)$ tale che $h = R_\gamma(g)$ con $g \in \mathscr{H}$, le misure γ e γ_h sono equivalenti ed inoltre la densità di γ_h è*

$$\rho_h(x) = \exp\Big(g(x) - \frac{1}{2}|h|^2_{H(\gamma)}\Big).$$

Dimostrazione. Sia g tale che $R_\gamma(g) = h$. Utilizzando la formula (2.1.13) e l'uguaglianza

$$f(h) = R_\gamma(g)(f) \qquad \forall f \in X^*$$

si ottiene che la trasformata di Fourier della misura $\nu = \rho\gamma$ coincide con la trasformata di Fourier di γ_h, e quindi per la Proposizione 2.2 si conclude. □

Le misure Gaussiane godono inoltre della seguente proprietà espressa nel prossimo teorema la cui dimostrazione può essere trovata in [6, Theorem 2.7.2] oppure in [31, II-§3]:

Teorema 2.34 (Feldman-Hajek)**.** *Siano γ_1, γ_2 due misure Gaussiane su uno spazio di Banach. Allora le due misure sono singolari oppure equivalenti.*

Proposizione 2.35. *Siano $\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_m$ in $\mathscr{H}$. Allora la misura immagine di γ tramite la mappa*

$$F : x \mapsto (\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_m)$$

è Gaussiana. Inoltre, se le $\hat{h}_i$ sono ortonormali, allora la legge della variabile aleatoria F è la Gaussiana standard su $\mathbb{R}^m$.

Dimostrazione. Dimostriamo inanzi tutto $\hat{h}_{\#}\gamma$ è Gaussiana. Sia l_n in X^* tale che $l_n \to \hat{h}$ in $L^2(\gamma)$ e γ-quasi certamente. Utilizzando la trasformata di Fourier si ha

$$\begin{aligned}\widetilde{\hat{h}_{\#}\gamma}(t) &= \int \exp\Big(it\hat{h}(x)\Big)\, d\gamma(x) = \lim_n \int \exp\Big(it\hat{l}_n(x)\Big)\\ &= \lim_n \exp\Big(-\frac{1}{2}t^2\sigma(l_n)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}t^2\sigma(h)\Big),\end{aligned}$$

e quindi $\hat{h}_{\#}\gamma$ è Gaussiana per ogni $\hat{h} \in \mathscr{H}$. Da cui si ottiene che per ogni $\hat{h}_i$ ed ogni loro combinazione lineare la misura immagine è Gaussiana e quindi abbiamo dimostrato che $F_{\#}\gamma$ è Gaussiana. $\square$

Teorema 2.36. *Sia γ una misura centrata su uno spazio di Banach separabile X. Allora lo spazio di Cameron-Martin $H(\gamma)$ coincide con l'intersezione di tutti i sottospazi lineari di misura piena secondo γ. Inoltre, se X ha dimensione infinita allora $\gamma(H(\gamma)) = 0$.*

Dimostrazione. Sia L un sottospazio lineare di misura piena secondo γ. Per il Corollario 2.33 le misure γ e γ_h sono equivalenti, e quindi si ha $\gamma(L-h) = 1$. Da cui si ottiene che $h \in L$. Supponiamo per assurdo che $h \notin H(\gamma)$. Allora $|h|_{H(\gamma)} = \infty$, e quindi esiste $f_n \in X^*$ tale che $\sigma(f_n) = 1$ e $f_n(h) > n$. Dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \int_X |f_n| \, d\gamma \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sigma(f_n) < \infty$$

si ottiene che lo spazio

$$L := \left\{ x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n(x) < \infty \right\}$$

ha misura intera.

Infine, se $\mathscr{H}$ ha dimensione infinita, allora esiste un sistema ortonormale $\{f_n\} \subset X^*$. Non è difficile vedere che per ogni $M > 0$ l'insieme

$$B := \left\{ x \in X : \sup_n f_n(x) \leqslant M \right\}$$

ha misura nulla e quindi l'insieme

$$\left\{ x \in X : \sum_n f_n(x)^2 < \infty \right\}$$

ha misura nulla. Inoltre, dato che $f_n(h) = \langle f_n, g \rangle_{L^2(\gamma)}$ si ottiene $B \supset H(\gamma)$. $\square$

Proposizione 2.37. *Siano $F \subset R_\gamma X^*$ un sottospazio k-dimensionale,*

$$\tilde{F} = \cap \left\{ \ker x^* : \; R_\gamma x^* \in F \right\},$$

dove $R_\gamma x_i^* = h_i$ e sia ν la misura immagine tramite la proiezione naturale su $\tilde{F}$ e μ la misura immagine tramite la proiezione naturale su F. Allora esiste una misura Gaussiana μ su F tale che vale $\gamma = \mu \otimes \nu$.

Dimostrazione. Sia $\{h_i\}$ una base ortonormale per F. Denoteremo con $\hat{h}_i$ e con x_i^* gli elementi in $\mathscr{H}$ e X^* tali che $R\hat{h}_i = h_i$ e $R_\gamma x_i^* = h_i$. Allora le proiezioni naturali su F e $\tilde{F}$ possono essere scritte come $\pi_F(x) = \sum_i x_i^*(x) h_i$ e $\pi_F(x) = \sum_i x - x_i^*(x) h_i$ rispettivamente.

Utilizzando che $x_j^* = \hat{h}_i$ γ-q.o. ed il fatto che $\{h_i\}$ sono ortonormali con semplici calcoli si ottiene

$$\begin{aligned}\int f(\pi_F(x))f(\pi_{\tilde{F}}(x))\,\gamma(x) &= \int f(\sum_i x_i^*(x)h_i)f(\sum_j x - x_j^*(x)h_j)\,d\gamma(x)\\ &= \sum_i \int f(x)\hat{h}_i(x)f(h_i) - \sum_{i,j}\int \hat{h}_i(x)\hat{h}_j(x)f(h_j)f(h_i)\\ &= \sum_i \Big(f(h_i)\int f(x)\hat{h}_i(x) - f(h_i)^2\Big)\\ &= \sum_i \Big(f(h_i)\Big(\int x\hat{h}_i(x)\Big) - f(h_i)^2\Big) = 0,\end{aligned}$$

e quindi per il criterio della trasformata di Fourier si ha

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}(f) = \exp(-\frac{1}{2}R_\gamma(f)(f)) &= \exp(-\frac{1}{2}R_\gamma(f\circ\pi_F))\exp(-\frac{1}{2}R_\gamma(f\circ\pi_{\tilde{F}}))\\ &= \exp(-\frac{1}{2}R_\mu(f\circ\pi_F))\exp(-\frac{1}{2}R_\nu(f\circ\pi_{\tilde{F}})),\end{aligned}$$

il che dimostra $\gamma = \mu\otimes\nu$. □

In realtà vale il seguente Teorema più forte la cui dimostrazione può essere trovata in [6].

Teorema 2.38. *Siano γ una misura Gaussiana centrata in uno spazio di Banach X e $h \in H(\gamma)$ tale che $|h|_{H(\gamma)} = 1$ e sia Y un iperpiano tale che $X = Y \oplus \mathbb{R}^1 h$. Denotiamo con ν la misura immagine di γ tramite la proiezione naturale $\pi : X \to Y$. Allora per ogni $y \in Y$ esiste una misura Gaussiana γ^y su $y + \mathbb{R}^1 h$ tale che*

$$\gamma(B) = \int_Y \gamma^y(B)\,d\nu(y) \qquad \textit{per ogni } B \in \mathcal{B}(X). \tag{2.1.14}$$

Inoltre, questa scelta può essere fatta tale che la misura γ^y abbia media $y - \hat{h}(x)h$ e covarianza $f \mapsto f(h)^2$.

Osservazione 2.39. In generale per trovare delle misura γ^y tale che valga (2.1.14) non è necessario fare l'ipotesi che $E \subset H(\gamma)$ oppure che E abbia dimensione finita. Infatti, l'esistenza di γ^y è garantita dal teorema di disintegrazione (v. [16, III-70]); però queste misure in mancanza di tali ipotesi potrebbero essere concentrate in punti singoli.

2.1.3 *Semigurppo di Ornstein-Uhlenbeck*

Definizione 2.40. Sia γ una misura Gaussiana centrata in uno spazio di Banach X. Il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck è definito su $L^p(\gamma)$ tramite la formula

$$T_t f(x) := \int_X f\Big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}\Big)\,d\gamma(y).$$

Verifichiamo che $(T_t)_{t\geqslant 0}$ è la famiglia di operatori sia ben definita. Per la Proposizione 2.30 la misura immagine di $\gamma\otimes\gamma$ tramite la mappa

$$(x, y) \mapsto e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y$$

è eguale a γ. Quindi per ogni $f \in L^p(\gamma)$ utilizzando la diseguaglianza di Jensen si ha

$$\begin{aligned}\int |T_t f(x)|^p \, d\gamma(x) &= \int \Big| \int f\Big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\Big)\, d\gamma(y)\Big|\, d\gamma(x) \\ &\leqslant \iint |f\Big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\Big)\, d\gamma(y)|^p \, d\gamma(y)\, d\gamma(y) \\ &= \int |f(x)|^p \, d\gamma(x)\end{aligned}$$

In maniera analoga, per le funzioni γ-Bochner integrabili $L^p(\gamma, E)$, dove E è uno spazio di Hilbert separabile, si definisce il semigruppo di Ornstein-Uhlenbeck utilizzando l'integrale di Bochner.

Teorema 2.41. *Per ogni $p > 0$, la famiglia $(T_t)_{t \geqslant 0}$ è un semigruppo fortemente continuo in $L^p(\gamma)$ su $L^p(\gamma)$ con norma*

$$\|T_t\|_{L^p(\gamma)} = 1.$$

Gli operatori $(T_t)_{t\geqslant 0}$ sono non-negativi su $L^2(\gamma)$. Inoltre se E è uno spazio di Hilbert, allora $(T_t)_{t\geqslant 0}$ è un semigruppo fortemente continuo su $L(\gamma, E)$ per ogni $p \geqslant 1$.

Dimostrazione. Dato che $T_t 1 = 1$ e $\|T_t\| \leqslant 1$ per ogni $t \geqslant 0$ si ottiene che la famiglia di operatori T_t hanno norma uguale a 1.

Dimostriamo che $T_{t+s} = T_t T_s$. Dato che per la Proposizione 2.30 la misura immagine di $\gamma \otimes \gamma$ tramite la mappa

$$G(y,z) = e^{-s}\frac{\sqrt{1-e^{-2t}}}{\sqrt{1-e^{-2t-2s}}}y + \frac{\sqrt{1-e^{-2s}}}{\sqrt{1-e^{-2t-2s}}}z.$$

è eguale a γ. Da cui si ottiene

$$\begin{aligned}T_t(T_s f)(x) &= \int T_s f\Big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\Big)\, d\gamma(y) \\ &= \iint f\Big(e^{-s}e^{-t}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}y + \sqrt{1-e^{-2s}}z\Big)\, d\gamma(y)\, d\gamma(z) \\ &= \iint f\Big(e^{-s}e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2s-2t}}G(y,z)\Big)\, d\gamma(y)\, d\gamma(z) \\ &= \int f\Big(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2s-2t}}w\Big)\, d\gamma(w) = T_{t+s}f(x).\end{aligned}$$

La simmetria in $L^2(\gamma)$ si verifica in maniera analoga. Infatti, ponendo $u := e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y$ e $v := e^{-t}y - \sqrt{1-e^{-2t}}x$ ed utilizzando l'eguaglianza $x = e^{-t}u - \sqrt{1-e^{-2t}}v$ si ottiene

$$\begin{aligned}\langle T_t f, f\rangle &= \int f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) f(x)\, d\gamma(x)\, d\gamma(y) \\ &= f(u) f(e^{-t}u\sqrt{1-e^{-2t}}v)\, d\gamma(u)\, d\gamma(v),\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

e quindi utilizzando l'invarianza di γ tramite la mappa $x \mapsto -x$si ottiene quanto voluto. Per mostrare la positività di T_t su $L^2(\gamma)$ è sufficiente osservare che $\langle T_t f, f\rangle = \langle T_{t/2}T_{t/2}f, f\rangle = \langle T_{t/2}f, T_{t/2}f\rangle \geqslant 0$.

Dimostriamo ora che $(T_t)_{t\geqslant 0}$ è fortemente continuo. È facile vedere che in $L^p(\gamma)$ come in ogni spazio metrico le funzioni continue e limitate sono dense e quindi per il Teorema di convergenza dominata di Lebesgue si ottiene la convergenza di $T_t f$ a f in $L^p(\gamma)$ per $t \to 0$. Per il caso generale è sufficiente approssimare la generica $f \in L^p(\gamma)$ con una funzione continua ed utilizzare la limitatezza della famiglia di operatori (T_t) per concludere.

Nel caso in cui si considera l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck sullo spazio $L^p(\gamma, E)$ le dimostrazioni seguono da quanto fatto con piccole modifiche. $\square$

2.1.4 *Speranza condizionale*

Per convenienza delle notazioni richiamiamo alcune nozioni fondamentali di probabilità.

Sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}(X)$ e $f \in L^1(\gamma)$. Denotiamo con ν la restrizione di la restrizione di γ su $(X, \mathcal{G})$. Definiamo

$$\mu(A) := \int_A f \, d\gamma \qquad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Non è difficile vedere che μ è assolutamente continua rispetto a γ e quindi per il Teorema di Radon-Nikodym esiste un unico elemento in $L^1(X, \mathcal{G}, \nu)$ che denoteremo con $E(f|\mathcal{G})$ tale che

$$\int_A f \, d\gamma = \int_A E(f|\mathcal{G}) \, d\gamma \qquad \forall A \in \mathcal{G}.$$

$E(f|\mathcal{G})$ viene chiamata speranza condizionale. In seguito denoteremo con $\mathcal{F}_n$ la σ-algebra generata da $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ e con $E_n(f) = E(f|\mathcal{F}_n)$. Denotando con $K = \cap_i \ker(x_i^*)$ ed utilizzando la Proposizione 2.37 si può dimostrare che

$$E_n(f) = \int_K f \, d\gamma_n^\perp,$$

dove $\gamma_n^\perp = \pi_{K\#}\gamma$.

Teorema 2.42 (Proprietà della speranza condizionale). *Siano $f, g \in L^1(\gamma)$. Allora valgono le seguenti proprietà*

(i). se f è $\mathcal{F}_n$ misurabile, allora $E_n(f) = f$

(ii). si ha $E_n(E_n(f)) = E_n(f)$

(iii). se f è $\mathcal{F}_n$ misurabile e fg è integrabile, allora si ha $E_n(fg) = fE_n(g)$

(iv). se $n > m$, allora si ha $E_m(E_n f) = E_m(f)$

(v). se $f \in L^p(\gamma)$, allora $E_n(f) \to f$ in $L^p(\gamma)$.

2.2 SPAZI DI SOBOLEV

Per semplicità, introduciamo alcune notazioni. Fissiamo una successione $\left\{x_j^*\right\} \subset X^*$ tale che $\hat{h}_j = R^* x_j^*$ è un sistema sistema ortonormale per $\mathscr{H}$, e quindi si ha anche che $h_j = R_\gamma x_j^*$ è un sistema ortonormale per H. Inoltre denoteremo con $H_n = \text{span}\{h_1, \ldots, h_n\}$. Per ogni $f : X \to \mathbb{R}$ definiamo

$$\partial_h f := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

e
$$\partial_h^* f := \partial_h f - f\hat{h}$$
se esistono i limiti. Inoltre, per semplicità di notazione utilizzeremo ∂_j al posto di ∂_{h_j}.

Definizione 2.43.
Diremo che $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione cilindrica con base $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se esistono dei funzionali lineari continui $l_1, \dots, l_n$ tali che
$$f(x) = \varphi(l_1(x), \dots, l_n(x)). \tag{2.2.1}$$

Se Z è uno tra gli spazi $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^k(\mathbb{R}^n)$ e $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ denoteremo con $\mathcal{F}Z$ lo spazio delle funzioni cilindriche f tali che la loro base appartiene a Z.

Inoltre definiamo lo spazio delle funzioni cilindriche con base in Z ed a valori in Y lo spazio funzionale generato da $\{yf : \ f \in \mathcal{F}Z, \ y \in Y\}$ come spazio vettoriale. In particolare Z è C^∞, C^k C_b^k denoteremo rispettivamente con $\mathcal{F}C^\infty(X, Y)$, $\mathcal{F}C^k(X, Y)$, $\mathcal{F}C_c(X, Y)$.

Infine se $F \subset R_\gamma(X^*)$ è un sottospazio finito dimensionale denoteremo con $\mathcal{F}C^\infty(F, Y)$, $\mathcal{F}C^k(F, Y)$, $\mathcal{F}C_c(F, Y)$ lo spazio delle funzioni cilindriche in $\mathcal{F}C^\infty(F, Y)$, $\mathcal{F}C^k(F, Y)$, $\mathcal{F}C_c(F, Y)$ tali che i funzionali $l_1, \dots, l_n$ in (2.2.1) soddisfano $R_\gamma(l_i) \in F$.

Teorema 2.44. *Sia γ una misura Gaussiana sullo spazio di Banach separabile X e sia $h \in H(\gamma)$. Supponiamo che $F : X \to \mathbb{R}^1$ sia una funzione γ-misurabile tale che, per γ-quasi ogni x, la mappa $t \mapsto F(x + th)$ sia assolutamente continua. Se le funzioni $\partial_h F$ e $F\hat{h}$ sono integrabili rispetto a γ, allora vale la seguente formula*
$$\int \partial_h F \, d\gamma = \int F\hat{h} \, d\gamma. \tag{2.2.2}$$

Dimostrazione. Per l'omogeneità della mappa $h \mapsto \partial_h F$ non è restrittivo supporre che h sia unitario in $H(\gamma)$. Sia Y un iperpiano chiuso tale che $Y \oplus \mathbb{R}h$.Allora per il Teorema 2.38 esiste una famiglia di misure $\{\gamma^y\}$ tale che valga la formula (2.1.14) ed inoltre, dalla dimostrazione del Teorema 2.38 si vede che γ^y si può scegliere come la misura immagine della Gaussiana standard γ_1 su $\mathbb{R}$ tramite la mappa $t \mapsto th + y - \hat{h}(y)h$ quindi si ha
$$\begin{aligned}
\int_X \partial_h F(x) \, d\gamma(x) &= \iint \partial_h F(x) \, d\gamma^y(x) \, d\nu(y) \\
&= \int_Y \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} F(th + y - \hat{h}(y)h) \, d\gamma_1(t) \right) d\nu(y) \\
&= \int_Y \left(\int_{\mathbb{R}} F(th + y - \hat{h}(y)h)\hat{h}(th + y - \hat{h}(y)h) \, d\gamma_1(t) \right) d\nu(y) \\
&= \iint F(x)\hat{h}(x) \, d\gamma^y(x) \, d\nu(y) = \int_X F(x)\hat{h}(x) \, d\gamma(x).
\end{aligned}$$
$\square$

Corollario 2.45. *Sia γ una misura su uno spazio di Banach separabile X e sia $h \in H(\gamma)$. Supponiamo che la mappa $F : X \to E$ sia misurabile in uno spazio di Banach separabile E tale che per γ-quasi ogni $x \in X$, la mappa $F(x + th)$ sia assolutamente continua e quasi ovunque differenziabile ed inoltre le mappe $\partial_h F$ e $F\hat{h}$ siano γ-Bochner integrabili rispetto a γ. Allora si ha*
$$\int_X \partial_h F \, d\gamma = \int F(x)\hat{h} \, d\gamma \tag{2.2.3}$$

Dimostrazione. Dato che per ipotesi i due lati di (2.2.3) hanno senso, è sufficiente verificare l'eguaglianza applicando ai due lati ogni funzionale lineare continuo in E, e quindi ci riduciamo al caso descritto in precedenza. □

Corollario 2.46. *Supponiamo che valgano le condizioni del Teorema 2.44 ed inoltre supponiamo che $F \in L^1(\gamma)$. Allora per ogni $f \in \mathcal{F}C_b^1(X)$ si ha*

$$\int \partial_h\varphi(x)F(x)\,d\gamma(x) = \int \varphi(x)(\hat{h}(x) - \partial_h F(x))\,d\gamma(x) = \int_X \varphi(x)\partial^* F(x)\,d\gamma(x) \quad (2.2.4)$$

Dimostrazione. Osserviamo per ogni $\varphi \in \mathcal{F}C^\infty(X)$ si ha $\partial_h\varphi F = \partial_h(\varphi F) - \varphi\partial_h F$, e quindi

$$\int_X \partial_h\varphi F\,d\gamma = \int (\partial_h(\varphi F) - \varphi\partial_h F)\,d\gamma,$$

il che conclude la dimostrazione. □

Definizione 2.47. Per ogni $u \in \mathcal{F}C_b^1(X)$ definiamo $\nabla_H u : X \to H(\gamma)$ tramite la formula

$$[\nabla_H u, h] = \partial_h u.$$

Osservazione 2.48. Se $u = \varphi(\Pi_{f,\dots,f_n})$, con $f_1,\dots,f_n \in X^*$, allora Sia $\varphi \in \mathcal{F}C_b^1$. Se fissiamo un sistema ortonormale per $H(\gamma)$, allora possiamo scrivere

$$[\nabla_H u, h] = \sum_{j\in N}[\nabla_H u, h_j]\,[h, h_j] = \Big[\sum_{j\in\mathbb{N}} \partial_j u h_j, h\Big],$$

e quindi $\nabla_H u = \sum_j \partial_j u\, h_j$.

Definizione 2.49. Fissato un sistema ortonormale, definiamo l'operatore di divergenza $\nabla_H^* : \mathcal{F}C_b^1(X, H(\gamma)) \to \mathcal{F}C_b$ come

$$\nabla_H^* u = \sum_{j=1}^\infty \partial_j^*[h_j, u].$$

Osservazione 2.50. Utilizzando il Corollario 2.46 si ottiene

$$\int [\nabla_H u, v] = \int \partial_j u[h_j, v] = \int u\partial_j^*[h_j, v] = \int u\nabla_H^* v, \quad (2.2.5)$$

con $u \in \mathcal{F}C_b^1(X)$ e $v \in C_b^1(X, H(\gamma))$, e quindi la definizione di ∇_H^* è indipendente dalla scelta della base. Inoltre, grazie alla (2.2.5) si vede facilmente che ∇_H è chiudibile in $L^p(\gamma)$ per ogni $p < \infty$. Denoteremo con $\mathbb{D}^{1,p}$ il domino della chiusura di ∇_H.

Diseguaglianze isoperimetrice

In questa sezione discuteremo brevemente le disuguaglianze isoperimetriche su spazi di Wiener.

Osservazione 2.51. Denotiamo con ϕ la funzione di ripartizione della misura gaussiana standard su $\mathbb{R}$ i.e.

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^t \exp(-\frac{x^2}{2})\,dx$$

e con $\mathscr{U} = \phi' \circ \phi^{-1}$. Allora la derivata di $\mathscr{U} = -\phi^{-1}$ ed inoltre si ha

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\mathscr{U}(x)}{x\sqrt{2\log(1/x)}} = 1$$

Diamo ora senza dimostrazione l'enunciato della diseguaglianza isoperimetrica su $\mathbb{R}^n$. I dettagli della dimostrazione si possono trovare in [33] oppure in [6].

Teorema 2.52. *Sia γ_n la misura Gaussiana standard su $\mathbb{R}^n$ e sia $U = \overline{B(0,1)}$, dove $B(0,1)$ è la palla unitaria in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni insieme Boreliano A vale:*

$$\phi^{-1}\Big(\gamma_n(A+rU)\Big) \geqslant \phi^{-1}\Big(\gamma_n(A)\Big) + r \quad \forall r > 0. \tag{2.2.6}$$

Teorema 2.53. *Sia γ una misura Gaussiana su uno spazio di Banach separabile X e sia U_H la palla unitaria chiusa in H. Allora per ogni insieme Boreliano A si ha*

$$\phi^{-1}\Big(\gamma(A+rU_H)\Big) \geqslant \phi^{-1}\Big(\gamma(A)\Big) + r \quad \forall r > 0. \tag{2.2.7}$$

Inoltre se $\gamma(A) > 1/2$ si ha

$$\gamma(A+rU_H) \geqslant \phi(r) \geqslant 1 - \frac{1}{2}\exp(-\frac{1}{2}r^2) \tag{2.2.8}$$

Dimostrazione. Osserviamo che è sufficiente dimostrare l'affermazione per insiemi compatti. Infatti, dato che γ è una misura di Radon esiste una successione di compatti (K_n) tale che $K_n \subset A$ e $\gamma(A \setminus K_n) \leqslant 1/n$, da cui si ottiene

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\Big(\gamma(A+rU_H)\Big) &\geqslant \limsup_{n\to\infty}\ \phi^{-1}\Big(\gamma(K_n+rU_H)\Big) \geqslant \limsup_{n\to\infty}\ \phi^{-1}\Big(\gamma(K_n)\Big) + r \\ &= \phi^{-1}\Big(\gamma(A)\Big) + r.\end{aligned}$$

Utilizzando il procedimento Gram-Schidt è possibile scegliere $\{f_k\} \subset X^*$ tale che $\hat{h}_k = R^* f_k$ è un sistema ortonormale per $\mathscr{H}$. Poniamo con P_n la proiezione su $\mathbb{R}^n$ definita come $P_n(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Osserviamo inoltre che la misura immagine di γ tramite la mappa è la misura Gaussianastandard su $\mathbb{R}^n$.

Dimostriamo che per ogni compatto $K \subset X$ vale l'uguaglianza

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n^{-1}\Big(P_n(K)\Big). \tag{2.2.9}$$

Chiaramente dato che $K \subset P_n^{-1}\Big(P_n(K)\Big)$ si ottiene che K è contenuto in $\bigcap_n P_n^{-1}\Big(P_n(K)\Big)$. Supponiamo per assurdo che esista $x \notin K$ tale che $P_n(x) \in P_n(K)$ per ogni $n \geqslant 1$. Allora per esiste una successione $\{k_n\} \subset K$ tale che $P_n(k_n) = P_n(x)$. Dato che $\{k_n\}$ contiene una sottosuccessione convergente k_{n_h} a qualche elemento $k \in K$, si ottiene che $P_n(x) = P_n(k)$ per ogni $n \geqslant 0$, da cui si ha $x = k$, il che contraddice l'assunzione.
In generale l'identità (2.2.9) non è vera ma vale solo un contenimento.

Sia $K \subset X$ un insieme compatto. Dato che U_H è compatto si ottiene la compattezza di $K + U_H$. Utilizzando la (2.2.9) si ottiene

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\Big(\gamma(K+rU_H)\Big) &= \lim_{n\to\infty}\phi^{-1}\bigg(\gamma\Big(P_n^{-1}(P_nK+rU_H)\Big)\bigg) \geqslant \lim_{n\to\infty}\phi^{-1}\Big(\gamma_n(P_n(K)+rU)\Big) \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\phi^{-1}\Big(\gamma_n(P_n(K))\Big) + r = \lim_{n\to\infty}\phi^{-1}\bigg(\gamma\Big(P_n^{-1}(P_n(K))\Big)\bigg) + r \\ &= \phi^{-1}\Big(\gamma(K)\Big) + r\end{aligned}$$

□

Teorema 2.54 (Gauss-Sobolev)**.** *Per ogni $u \in \mathbb{D}^{1,1}$ si ha*

$$\int |\nabla_H u|_H \, d\gamma \geqslant \int_0^\infty \mathscr{U}\Big(\gamma(\{|u| > t\})\Big) \, dt. \tag{2.2.10}$$

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente un caso particolare: $X = \mathbb{R}^n$ e $\gamma = \gamma_n$ e $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Utilizzando la Formula di Coarea si ha

$$\int \|\nabla u(x)\| \, d\gamma(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_0^\infty \Big(\int_{|u|=t} \exp\Big(-\frac{1}{2}\|x\|^2\Big) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x)\Big) \, dt.$$

Inoltre, se A è un aperto con frontiera regolare, allora si

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\gamma(A + rU) - \gamma(A)}{r} = \int_{\partial A} \exp\Big(-\frac{1}{2}\|x\|^2\Big) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

e quindi utilizzando la diseguaglianza isoperimetrica si ottiene

$$\int_{\partial A} \exp\Big(-\frac{1}{2}\|x\|^2\Big) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \geqslant \mathscr{U}(\gamma(A)).$$

Dato che per il Teorema di Sard, allora $\{|u| > t\}$ ha frontiera regolare per quasi ogni t e quindi si ottiene la tesi nel caso finito dimensionale. Sia ora $u \in \mathcal{F}C^1$. Non è restrittivo supporre che $u = \varphi(\Pi_{f_1,\dots,f_n})$ con dove $f_1, \dots, f_n \in X^*$ e tali che $R^* f_1, \dots, R^* f_n$ sono ortonormali in $\mathscr{H}$. Per la formula di cambio di variabili si ha

$$\int_X |\nabla_H u(x)| \, d\gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi| \, d\gamma_n(x) \geqslant \int_0^\infty \mathscr{U}\Big(\gamma(\{|\varphi| > t\})\Big) \, dt = \int_0^\infty \mathscr{U}\Big(\gamma(\{|u| > t\})\Big) \, dt$$

Infine sia $u \in \mathbb{D}^{1,1}$. Scegliamo una successione di funzioni in $\mathcal{F}C^1(X)$ tali che $\|u - u_n\|_{1,1} \to 0$ per $n \to \infty$. Non è restrittivo supporre che u_n converge a u γ-quasi ovunque, e quindi per ogni t fissato si ha

$$\mathscr{U}\Big(\gamma(\{|u_n| > t\})\Big) \to \mathscr{U}\Big(\gamma(\{|u| > t\})\Big)$$

e quindi utilizzando il Lemma di Fatou otteniamo

$$\begin{aligned} \int_X |\nabla_H u(x)| \, d\gamma(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_X |\nabla_H u_n(x)| \, d\gamma(x) \geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathscr{U}\Big(\gamma(\{|u_n| > t\})\Big) \, dt \\ &\geqslant \int_0^\infty \mathscr{U}\Big(\gamma(\{|u| > t\})\Big) \, dt \end{aligned}$$

□

Proposizione 2.55. *Per ogni $t > 0$, l'operatore $\nabla_H T_t : \mathcal{F}C_b^1(X) \to L^1(X, H)$ si può estendere in maniera continua su tutto lo spazio $L\log^{1/2} L(X)$.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{F}C_b^1$ tale che $\|\varphi\|_{L\log^{1/2} L} \leqslant 1$ e sia $h = R_\gamma l$ tale che $\|h\|_H \leqslant 1$. Dato che per il Teorema di Fernique $X^* \subset L^\Psi$, allora esiste c tale $\int(\exp(c^{-1} l^2) - 1) \, d\gamma = 1$ ed inoltre è facile vedere che c si può scegliere uniformemente al variare di l con $l \in X^*$. Osserviamo ulteriormente che

$$\begin{aligned} \partial_h T_t \varphi(x) &= e^{-t} \int \partial_h \varphi(e^{-t} x + (1 - e^{-2t})^{1/2} y) \, d\gamma(y) \\ &= \frac{e^{-t}}{\Big(1 - e^{-2t}\Big)^{1/2}} \int_X \varphi\Big(e^{-t} x + (1 - e^{-2t})^{1/2} y\Big) \, l(y) \, d\gamma(y). \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Allora utilizzando la diseguaglianza Young si ha

$$\begin{aligned}\|\nabla_H T_t\varphi(x)\|_H &= \sup\{\partial_h T_t\varphi(x):\ h\in R_\gamma X^*, \|h\|=1\}\\ &\leqslant c\Big(\int A_{1/2}(|\varphi(e^{-t}x+(1-e^{-2t})^{1/2}y)|)\,d\gamma+1\Big).\end{aligned}$$

Integrando ed utilizzando l'invarianza per rotazione delle misure Gaussiane centrate si ha

$$\begin{aligned}\|\nabla_H T_t\varphi\|_{L^1(\gamma)} &= c\Big(\int_{X\times X} A_{1/2}\Big(|\varphi(e^{-t}x+(1-e^{-2t})^{1/2}y)|\Big)\,d\gamma(x)\,d\gamma(y)+1\Big)\\ &= c\Big(\int A_{1/2}(|\varphi|)\,d\gamma\Big)\leqslant 2c,\end{aligned}$$

dove nell'ultima diseguaglianza abbiamo utilizzato che $\|\varphi\|_{L\log^{1/2}L}\leqslant 1$. Infine utilizzando la densità di $\mathcal{F}C_b^1$ in $L\log^{1/2}L(X)$ si ottiene la tesi. □

Proposizione 2.56. *Sia $u\in L\log^{1/2}L(\gamma)$. Allora valgono le seguenti*

(i). $T_tu\in\mathbb{D}^{1,1}$ per ogni $t>0$,

(ii). T_tu converge a u in $L\log^{1/2}L(\gamma)$ per $t\to 0^+$.

Dimostrazione. (i) La tesi è chiaramente vera quando $u\in\mathcal{F}C_b^1$. Per la densità di $\mathcal{F}C_b^1$ in $L\log^{1/2}L(X)$ esiste una successione $\{\varphi_n\}\subset\mathcal{F}C_b^1$ tale che $\varphi_n\to u$ in $L\log^{1/2}L(X)$. Utilizzando la Proposizione 2.55 si ottiene che la successione $\{\nabla_H T_t\varphi_n\}$ è convergente in $L^1(X;H)$ ed inoltre si ha $T_t\varphi_n\to T_tu$ in $L^1(X)$ e quindi per la chiusura di ∇_H si conclude che $T_tu\in\mathcal{D}^{1,1}$. □

Proposizione 2.57. *Lo spazio $\mathbb{D}^{1,1}$ può essere immerso in maniera continua in $L\log^{1/2}L(X,\gamma)$.*

Dimostrazione. Utilizzando l'Osservazione 2.51 ed il fatto che $\sqrt{2\log(1/x)}\geqslant\sqrt{\log(1+1/x)}$ per x abbastanza piccolo è possibile scegliere $\delta>0$ tale che $\mathscr{U}(x)\geqslant x\sqrt{\log(1+x)}$ per ogni $0<x<\delta$.

Sia $u\in\mathcal{F}C_b^1(X)$ tale che $\|u\|_{1,1}\leqslant 1/\sqrt{\log 1+1/\delta}$. Se $s\geqslant 1/\delta$, allora

$$\mu(\{|u|>s\})\leqslant\|u\|_{L^1(\gamma)}/s\leqslant 1/s\leqslant\delta,$$

e quindi utilizzando la diseguaglianza isoperimetrica i.e.

$$\int_X|\nabla_H u|_H\,d\gamma\geqslant\int_0^\infty\mathscr{U}\Big(\mu(\{|u|\geqslant s\})\Big)\,ds,$$

si ottiene

$$\mathscr{U}\Big(\mu(\{|u|\geqslant s\})\Big)\geqslant\mu(\{|u|>s\})\sqrt{\log\Big(1+\mu(\{|u|>s\})^{-1}\Big)}\geqslant\mu\Big(\{|u|>s\}\Big)\sqrt{\log(1+s)}.$$

Da cui si ottiene

$$\begin{aligned}1&\geqslant\sqrt{\log(1+\delta^{-1})}\|u\|_{1,1}\geqslant\sqrt{\log(1+\delta^{-1})}\|u\|_{L^1(\gamma)}+\|\nabla_H u\|_{L^1(\gamma)}\\ &\geqslant\sqrt{\log(1+\delta^{-1})}\int_0^\infty\mu(\{|u|>s\})\,ds+\int_{1/\delta}^\infty\mu(\{|u|>s\})\sqrt{\log(1+s)}\,ds\\ &=\int_0^\infty\mu(\{|u|>s\})\Big(\sqrt{\log(1+\delta^{-1})}+\sqrt{\log(1+s)}\chi_{(\delta^{-1},\infty)}(s)\Big)\,ds\\ &\geqslant\int_0^\infty\mu(\{|u|>0\})\sqrt{\log(1+s)}\,ds=\int_X\Big(\int_0^{|u(x)|}\sqrt{\log(1+s)}\,ds\Big)\,d\mu(x)\\ &=\|u\|_{L\log^{1/2}L(X,\gamma)},\end{aligned}$$

la quale dimostra la limitatezza dell'immersione. □

Osservazione 2.58 (Regole di commutazione)**.** Valgono le seguenti relazioni

(*i*). $T_t E_m v = E_m T_t v$ per ogni $v \in L^1(\gamma)$. Infatti, sia θ tale che $\cos(\theta) = e^{-t}$. Allora utilizzando l'invarianza per rotazioni delle misure Gaussiane centrate si ha

$$
\begin{aligned}
E_m T_t u &= \iint u(\cos(\theta)x_1 + cos(\theta)x_2 + sin(\theta)y)\, d\gamma(y)\, d\gamma_m^{\perp}(x_2) \\
&= \int \Big(\int u(cos(\theta)x_1 + cos(\theta)x_2 + sin(\theta)y_1 + sin(\theta)y_2)\, d\gamma_m(y_1) \Big)\, d\gamma_m^{\perp}(y_2) d\gamma_m^{\perp}(x_2) \\
&= \iint u(cos(\theta)x_1 + sin(\theta)y_1 + z)\, d\gamma_m(y_1)\, d\gamma_m^{\perp}(y_1)\, d\gamma_m^{\perp}(z) \\
&= \int \Big(\int u(cos(\theta)x_1 + sin(\theta)y_1 + z)\, d\gamma_m(z) \Big)\, d\gamma(y_1) = T_t E_m u
\end{aligned}
$$

(*ii*). $\nabla_H T_t u = e^{-t} T_t \nabla_H u$ per ogni $u \in \mathbb{D}^{1,1}$. Utilizzando la densità di $\mathcal{F}C_b^1(X)$ ed il Teorema 2.41 è sufficiente dimostrare la relazione per $u \in \mathcal{F}C_b^1(X)$ e quest'ultima è facile da verificare.

2.3 FUNZIONI BV

La classe delle funzioni BV su spazi di Wiener è stata introdotta per la prima volta da M. Fukushima e M. Hino in [26] utilizzando un approccio probabilistico tramite le forme di Dirichlet. Recentemente L. Ambrosio, M. Miranda, S. Maniglia e D. Pallara in [4, 5] hanno sviluppato questa teoria utilizzando un approccio integral-geometrico, quindi simile al caso finito dimensionale.

Definizione 2.59. Sia $u \in L\log^{1/2}L(\gamma)$. Diremo che $u \in \mathrm{BV}(X,\gamma)$ se esiste una misura $\mu \in \mathcal{M}(X,H)$ tale che per ogni $\mathcal{F}C_b^1(X)$ si ha

$$
\int u(x)\partial_i^* \varphi(x)\, d\gamma = -\int \varphi(x)\, d\mu_i(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X,\gamma), \tag{2.3.1}
$$

dove $\mu_i = [h_i, \mu]$. Inoltre, diremo che un insieme E ha perimetro finito se $\chi_E \in \mathrm{BV}(X,\gamma)$.

Osservazione 2.60. Dato che la σ-algebra di Borel è generata dagli insiemi cilindrici esiste un unica misura μ che verifica (2.3.1). In analogia con le notazioni del primo capitolo denoteremo questa misura con $D_\gamma u$.

Nel caso in cui $u \in \mathbb{D}^{1,1}(X,\gamma)$ utilizzando la definizione è facile verificare che $D_\gamma u = \nabla_H u \cdot \gamma$.

Siano $u \in \mathrm{BV}(X,\gamma)$ e $x^* \in X^*$ tale che $\|h\|_H = 1$ dove $h = R_\gamma(x^*)$. Allora esiste μ_h tale che

$$
\int u(x)\partial_i^* \varphi(x)\, d\gamma = -\int \varphi(x)\, d\mu(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X,\gamma). \tag{2.3.2}
$$

Dato che $S_n x^* := \sum_{i=1}^n [h, h_i]_H x_i^* \to x^*$ in $L^2(X,\gamma)$, allora $S_n x^* \to x^*$ in $L^\Psi(X,\gamma)$. Infatti, senza perdita di generalità possiamo supporre che $\|x^*\| \leqslant \varepsilon$, quindi con semplici calcoli si ha $\|S_n x^* - x^*\| \leqslant C\varepsilon$, ed inoltre a meno di passare ad una sottosuccessione possiamo supporre ulteriormente che $S_n x^* \to x^*$ puntualmente γ-quasi ovunque. Infine utilizzando il Teorema di Fernique per dominare la funzione $\exp(|S_n x^* - x^*|)$ e passando al limite sotto al segno del integrale si ottiene quanto voluto.

Con semplici calcoli utilizzando l'integrabilità di $\int x^* u \, d\gamma$, la convergenza di

$$\sum_i [h, h_i]_H x_i^* \to x^* \qquad \text{in } L^\Psi(X, \gamma),$$

e la linearità del operatore $h \to \partial_h \varphi$ per ogni $\varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X)$ si ha

$$\begin{aligned}
\int u(x) \partial_h^* \varphi(x) \, d\gamma &= -\int \Big(\partial_h \varphi(x) u - x^* \varphi u \Big) \, d\gamma(x) \\
&= -\int \partial_h \varphi(x) u \, d\gamma + \int x^* \varphi u \, d\gamma(x) \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty} [x^*, x_i^*]_{L^2(\gamma)} \int \partial_i \varphi(x) u \, d\gamma + \sum_{i=1}^{\infty} [x^*, x_i^*]_{L^2(\gamma)} \int x_i^* \varphi \, u \, d\gamma(x) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} [h, h_i]_H \int \partial_i^* \varphi u \, d\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} [h, h_i]_H \int \varphi \, d\mu_i = \int \varphi \, d\mu_h,
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

dove $\mu_h = [h, \mu]$. Quindi abbiamo dimostrato che la definizione è indipendente dalla scelta di del sistema ortonormale $h_j = R_\gamma x_j^*$. Dato che $\int x^* u \, d\gamma$ non è integrabile per una generica $u \in L^1(\gamma)$ per dare senso a (2.3.2), diversamente dal caso finito dimensionale bisogna richiedere maggiore regolarità, rispetto alla sola appartenenza a $L^1(\gamma)$

Proposizione 2.61. *Sia $u \in L^2(\gamma)$. Allora $u \in \mathrm{BV}(X, \gamma)$ se solo se per ogni $h \in H(\gamma)$ esiste una misura μ_h tale che*

$$\int_X u(x) \partial_h^* \phi(x) \, d\gamma = -\int \phi(x) \, d\mu_h(x) \quad \forall \phi \in \mathcal{F}C_b^1(X),$$

con $\bigvee_{|h|_{H(\gamma)}=1} \mu_h$ finito. Inoltre, $\bigvee_{|h|_{H(\gamma)}=1} \mu_h = |\mu|$

Dimostrazione. Se $u \in \mathrm{BV}(X, \gamma)$, allora con calcoli simili a quelli nell'Osservazione 2.60 l'esistenza di $\mu_h = [h, \mu]_H$ è garantita da l'integrabilità di $\int x^* u \, d\gamma$, la convergenza di

$$\sum_i [h, h_i]_H x_i^* \to x^* \qquad \text{in } L^2(X, \gamma)$$

e la linearità del operatore $h \to \partial_h \varphi$ per ogni $\varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X)$. La limitatezza di $|\mu_h|$ è garantita da $|D_\gamma u| < \infty$, e quindi $\bigvee_{|h|_{H(\gamma)}=1} \mu_h$ è una misura finita.

Viceversa, definiamo $\mu_i = [h_i, \mu]_H$ e

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i h_i,$$

e quindi $\mu_h = [h, \mu]$. Dato che per ipotesi formula di integrazione per parti vale è sufficiente dimostrare che μ è una misura finita. Sia $\{B_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ una partizione di X e sia $\{\alpha_n\} \subset H$ definita come

$$\alpha_n := \begin{cases} \frac{\mu(B_n)}{\|\mu(B_n)\|_H}, & \text{se } \mu(B_n) \neq 0, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mu(B_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|[\mu(B_n), \alpha_n]\alpha_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_{\alpha_n}(B_n)|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_{\alpha_n}|(B_n) \leqslant \bigvee_{|h|_{H(\gamma)}=1} \mu_h,$$

e quindi definendo $|D_\gamma u := \mu|$ si ha $u \in \mathrm{BV}(X, \gamma)$ e $|D_\gamma u| \leqslant \bigvee_{|h|_{H(\gamma)}=1} \mu_h$. □

Proposizione 2.62. *Sia $u \in L\log^{1/2}L(X, \gamma)$, una funzione cilindrica tale che esiste una funzione v in $\mathbb{R}^n$ tale che*

$$u(x) = v(\Pi_{x_1*,\dots,x_n^*})$$

tali che $R^* x_i^*$ sono ortonormali in $H(\gamma)$. Allora $u \in \mathrm{BV}(X, \gamma)$ se solo se $v \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n\ \gamma_n)$

Dimostrazione. Dato che la legge di Π sotto la misura γ è γ_m con semplici calcoli si ha

$$\begin{aligned}|D_\gamma u|(X) &= \sup\left\{\int u(x)\nabla_H^*\varphi(x)\,d\gamma(x) :\ \varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X, H),\ \|\varphi\|_H \leqslant 1,\ \forall x \in X\right\}\\ &= \sup\left\{\int u(x)\nabla_H^*\varphi(x)\,d\gamma(x) :\ \varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X, H_m),\ \|\varphi\|_H \leqslant 1,\ \forall x \in X\right\}\\ &= \sup\left\{\int v(y)\nabla_H^*\varphi(y)\,d\gamma(y) :\ \varphi \in C_b^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m),\ \|\varphi\|_\infty \leqslant 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^m\right\},\end{aligned}$$

e quindi si ottiene la tesi.

□

Teorema 2.63. *Sia $u \in \mathrm{BV}(X, \gamma)$. Allora per ogni insieme di Borel B vale la seguente uguaglianza*

$$|D_\gamma u|(B) = \int_{\mathbb{R}} P(\{u > t\}, B)\,dt. \tag{2.3.4}$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente che B sia un insieme aperto e denotiamo con $E_t = \{u > t\} \cap B$. Per semplicità abbiamo suddiviso la dimostrazione in tre parti.

Passo 1. Sia $\phi \in \mathcal{F}C^1(X)$ tale che $|\phi|_H \leqslant 1$. Dimostriamo che

$$\int_B u\nabla_H^*\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{E_t} \nabla_H^*\phi\,d\gamma\Big)\,dt. \tag{2.3.5}$$

Se $u \geqslant 0$, allora si ha

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t}(x)\,dt, \qquad \text{per } \gamma\text{-q.o. } x \in B,$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int_B u\nabla_H^*\phi\,d\gamma &= \int_B \Big(\int_0^\infty \chi_{E_t}\,dt\Big)\nabla_H^*\phi(x)\,d\gamma(x) = \int_0^\infty \Big(\int_B \chi_{E_t}\nabla_H^*\phi\,d\gamma(x)\Big)\,dt\\ &= \int_0^\infty \Big(\int_{E_t} \nabla_H^*\phi\,d\gamma(x)\Big)\,dt.\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Se $u \leqslant 0$, allora si ha

$$u(x) = \int_{-\infty}^{0} (\chi_{E_t}(x) - 1)\, dt,$$

e quindi in maniera simile a quanto fatto in (2.3.6) si ottiene

$$\int_B u\, \nabla_H^* \phi\, d\gamma = \int_{-\infty}^{0} \Big(\int_{E_t} \nabla_H^* \phi(x)\, d\gamma(x) \Big).$$

Il caso generale segue facilmente decomponendo $f = f^+ - f^-$.

Utilizzando la (2.3.5) e la definizione di perimetro si ha

$$\int u(x) \nabla_H^* \phi(x)\, d\gamma \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t, X)\, dt,$$

e quindi passando all'estremo superiore si ottiene

$$V_\gamma(u) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t, X)\, dt.$$

Passo 2 Dimostriamo che ogni $u \in \mathrm{BV}(X, \gamma) \cap \mathbb{D}^{1,1}(X)$ vale l'eguaglianza in (2.3.4). Definiamo

$$m(t) := \int_{\{u \leqslant t\}} |\nabla_H u(x)|_H\, d\gamma(x) = \int_{B \setminus E_t} |\nabla_H u(x)|_H\, d\gamma(x).$$

Allora m è una funzione crescente, e quindi m' esiste per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni t, ed inoltre si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} m'(t)\, dt \leqslant \int_B |\nabla_H u|_H\, d\gamma. \tag{2.3.7}$$

Fissiamo $-\infty < t < \infty$ e $r > 0$ e definiamo $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come

$$\eta(s) := \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{se } s \leqslant t, \\ \frac{s-t}{r}, & \text{se } t < s \leqslant t + r, \\ 1, & \text{se } s > t + r. \end{cases}$$

Allora si ha

$$\eta'(s) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{se } t < s < t + r, \\ 1, & \text{se } s < t \text{ oppure } s > t + r. \end{cases}$$

Per ogni $\phi \in \mathcal{F}C_c^1(X, H(\gamma))$ si ha

$$\begin{aligned} -\int_B \eta(u(x)) \nabla_H^* \phi\, d\gamma &= \int_B \eta'(u(x)) [\nabla_H u, \phi]_H\, d\gamma(x) \\ &= \frac{1}{r} \int_{E_t \setminus E_{t+r}} [\nabla_H u, \phi]_H\, d\gamma(x), \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Utilizzando la (2.3.8) si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{m(t+r) - m(t)}{r} &= \frac{1}{r} \Big[\int_{B \setminus E_{t+r}} |\nabla_H u(x)|_H\, d\gamma(x) - \int_{B \setminus E_{t+r}} |\nabla_H u(x)|_H\, d\gamma(x) \Big] \\ &= \frac{1}{r} \int_{E_t \setminus E_{t+r}} |\nabla_H u(x)|_H\, d\gamma(x) = -\int_B \eta(u(x)) \nabla_H^* \phi\, d\gamma. \end{aligned}$$

Passando al limite per $r \to 0$ si ottiene

$$m'(t) \geqslant -\int_{E_t} \nabla_H^* \phi \, d\gamma(x) \qquad \text{per } \mathcal{L}\text{-quasi ogni t},$$

e prendendo l'estremo superiore al variare di ϕ si ottiene $P(E_t, B) \leqslant m'(t)$.

Passo 3 Infine dimostriamo che la (2.3.4) vale per ogni funzione $u \in \mathrm{BV}(X, \gamma)$. Per il Teorema 2.70 possiamo scegliere una successione di funzioni $u_n \in \mathbb{D}^{1,1}$ tale che $u_n \to u$ in $L^1(\gamma)$ ed inoltre si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int |\nabla_H u_n| \, d\gamma = |D_\gamma u|(B).$$

Per la densità di $\mathcal{F}C^1(X)$ in $\mathbb{D}^{1,1}$ non è restrittivo supporre che $u_n \in \mathcal{F}C^1(X)$. Definiamo $E_t^k := \{u_k > t\} \cap B$. Utilizzando il Teorema di Fubini otteniamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)| \, dt = \int_{f(x)\vee f_k(x)}^{f(x)\wedge f_k(x)} dt = |f_k(x) - f(x)|$$

e quindi

$$\int_B |f_k(x) - f(x)| \, d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_U |\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)| \, d\gamma(x) \Big) \, dt$$

Dato che $f_k \to f$ in $L^1(\gamma)$, esiste una sottosuccessione u_{k_n} tale che $\chi_{E_t^k} \to \chi_{E_t}$ in $L^1(\gamma)$ per $\mathcal{L}$-quasi ogni t. Inoltre, per la semicontinuità del perimetro si ha

$$P(E_t, B) \leqslant \liminf_{n\to\infty} P(E_t^{k_n}, B),$$

e quindi utilizzando il Lemma di Fatou si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} P(E_t, B) \, dt \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P(E_t^{k_n}, B) \, dt = \lim_{n\to\infty} \int |\nabla_H u_n| \, d\gamma = |D_\gamma u|(B)$$

□

Definizione 2.64. Denoteremo con $\mathcal{F}C_c^1(X, H)$ lo spazio delle funzioni Φ rapresentabili come

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\langle x_1^*, x\rangle, \dots, \langle x_n^*, x\rangle) h_i.$$

dove $\phi_i \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, sia $L = \mathrm{span}\{\nu_1, \dots, \nu_l\} \subset H_n$. Denoteremo con $\mathcal{F}^L C_c^1$ lo spazio delle funzioni $\Phi \in \mathcal{F}C_b^1(X, L)$ che hanno supporto contenuto nella striscia $\cap_i \{a_i < \langle y_i^*, x\rangle < b_i\}$ dove $R_\gamma(y_i^*) = \nu_i$ e $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.65. Sia $L \subset \cup_m H_m$ un sottospazio finito dimensionale oppure $L = H$. Definiamo la variazione totale di $u \in L^1(X, \gamma)$ lungo L come

$$V_\gamma^L(u) := \sup\left\{ \int_X u \nabla^*(\pi_L \phi) \, d\gamma : \ \phi \in \mathcal{F}C_c^1(X, H), |\phi(x)|_H \leqslant 1, \forall x \in X \right\}, \tag{2.3.9}$$

dove π_L è la proiezione ortogonale su L. Nel caso in cui $L = H$ chiameremo $V_\gamma^L(u)$ semplicemente variazione e sarà denotata con $V_\gamma(u)$; nel caso in cui $L = \mathrm{span}\{\nu\}$ sarà denotata con V_γ^ν; infine nel caso in cui $L = H_m$ sarà denotata con V_γ^m.

Osservazione 2.66. Per ogni $u \in L^1(\gamma)$ l'estremo superiore in (2.3.9) è lo stesso se invece di $\mathcal{F}C_c^1(X,H)$ consideriamo $\mathcal{F}C_b^1(X,H)$. Infatti, se Φ tale che

$$\sup\left\{\int u\nabla_H^*(\pi_L\phi)\,d\gamma:\ \phi \in \mathcal{F}C_b^1(X,H),\ |\phi(x)|_H \leqslant 1, \forall x \in X\right\} =: \tilde{V}_\gamma^L(u) \leqslant \int u\nabla_H^*\Phi\,d\gamma + \varepsilon,$$

allora utilizzando il fatto che Φ può essere approssimato come limite puntuale di successioni uniformemente limitate $\{\phi_n\} \subset \mathcal{F}C_c^1(X,H)$, possiamo trovare $\phi \in \mathcal{F}C_c^1(X,H)$ tale che

$$\sup\left\{\int \nabla_H^*(\pi_L\phi)\,d\gamma:\ \phi \in \mathcal{F}C_b^1(X,H),\ |\phi(x)|_H \leqslant 1, \forall x \in X\right\} =: \tilde{V}_\gamma(u) \leqslant \int u\nabla_H^*\phi\,d\gamma + \varepsilon,$$

e quindi $\tilde{V}_\gamma(u) \leqslant V_\gamma(u)$; l'altra diseguaglianza è ovvia poiché $\mathcal{F}C_C^1(X,H) \subset \mathcal{F}C_b^1(X,H)$.

Sia $u \in L^1(\gamma)$. Poniamo $\mu = D_\gamma u$ e $\mu^n = D_\gamma E_n u$. Allora dato che per ogni $i < n$ si ha $\partial_i^* E_n\varphi = E_n\partial_i^*\varphi$ si ha

$$\int \varphi\,d\mu_i^n \int E_n u\partial_i^*\varphi = -\int u\partial_i^* E_n\varphi = \int E_n\varphi\,d\mu_i, \tag{2.3.10}$$

e quindi passando al estremo superiore per $|\varphi| \leqslant 1,\ \varphi \in \mathcal{F}C_b^1$ si ottiene che $|\mu_i| \geqslant |\mu_i^n|$. Questa diseguaglianza vale anche nel caso in cui $i > n$ poiché $\mu_i^n = 0$. Da questa semplice osservazione concludiamo che $|D_\gamma u| \geqslant |D_\gamma E_n u|$. Infine, utilizzando la (2.3.10) si può dimostrare che $\liminf_n |D_\gamma E_n u|(X) \geqslant |D_\gamma u$, quindi $|D_\gamma E_n u|(X) \to |D_\gamma u|(X)$.

Osservazione 2.67. Sia $u \in L^1$ tale che $V_\gamma(u) < \infty$. Allora per ogni $t > 0$ $T_t u \in \mathbb{D}^{1,1}$. Verifichiamo prima che per ogni i esiste una funzione $g_i \in L^1$ tale che

$$\int T_t u\partial_i^*\varphi\,d\gamma = -\int g_i\varphi\,d\gamma, \tag{2.3.11}$$

per ogni $\phi \in \mathcal{F}^{h_i}C_c^1$. Infatti, con semplici calcoli si ha

$$\begin{aligned}\int T_t u\partial_i^*\varphi\,d\gamma &= -\int T_t u\partial_i\varphi\,d\gamma + \int T_t u\hat{h}_i\varphi\,d\gamma\\ &= -\int uT_t(\partial_i\varphi)\,d\gamma + \int uT_t(\hat{h}_i\varphi)\,d\gamma,\end{aligned}$$

quindi utilizzando la formula (2.2.11), cambiando l'ordine di integrazione ed un cambio di variabile si ottiene la funzione g_i e quindi con un argomento di densità si ottiene la validità di (2.3.11) per tutte le funzioni φ con base continua. Infine dato che

$$\int [\nabla_H T_t u, \Phi]\,d\gamma \leqslant V_\gamma(u),$$

per ogni $\Phi \in \mathcal{F}C_c^1$ tale che $\|\Phi\|_H \leqslant 1$ si ha che $\int \|\nabla T_t u\|_H \leqslant \infty$.

Teorema 2.68. *Sia $u \in L\log^{1/2}L(\gamma)$. Allora*

$$V_\gamma^m(u) = \int_K V_{\gamma_m}(u_y)\,d\gamma_m^\perp(y), \tag{2.3.12}$$

dove $K = \cap \ker(x_i^*)$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X, H_m)$ tale che $\|\psi\|_\infty \leqslant 1$. Allora si ha

$$\int_X u\nabla_m^*\varphi\, d\gamma = \int_K \Big(\int_{\mathbb{R}^m} u_y(\nabla^*\varphi_y)\, d\gamma_m \Big)\, d\gamma_m^\perp \leqslant \int_K V_{\gamma_m}(u_y)\, d\gamma_m^\perp(y),$$

e quindi si ha

$$V_\gamma^m(u) \leqslant \int_K V_{\gamma_m}(u_y)\, d\gamma_m^\perp(y).$$

Per dimostrare l'altra diseguaglianza non è restrittivo supporre che $V_\gamma^m(u) < \infty$. Consideriamo inizialmente il caso finito dimensionale (i.e. $X = \mathbb{R}^n$ con $n > m$ e $\gamma = \gamma_n$). In queste ipotesi utilizzando il Teorema di Riesz si dimostra che esiste una misura $D_\gamma^m u$ tale che

$$\int u\nabla^*\varphi\, d\gamma = -\int \varphi\, dD_\gamma^m u \qquad \forall \varphi \in C_b^1(X).$$

Dimostriamo che esiste una successione $\{u_k\} \subset \mathbb{D}^{1,1}$ tale che $u_k \to u$ in L^1 e tale che

$$\lim_k \int |\nabla_m u_k|\, d\gamma \leqslant V_\gamma^m(u),$$

dove $\nabla_m\varphi = (\partial_1\varphi, \ldots, \partial_m\varphi) \in \mathbb{R}^m$. Denotiamo con $u_k = T_{1/k}u$ e notiamo che per ogni $\phi \in \mathcal{F}C_c^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $|\phi| \leqslant 1$ si ha

$$\left|\int \phi\nabla_m u_n\, d\gamma\right| = \left|\int \nabla_m^*\phi u_n\, d\gamma\right| \to \left|\int \nabla_m^*\phi u\, d\gamma\right| \leqslant V_\gamma^m(u), \tag{2.3.13}$$

quindi la successione $\{\nabla_m u_k \cdot \gamma_n\}$ è limitata in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ da cui si deduce che la successione è debolmente* compatta. Dato che tutte le successioni hanno lo stesso limite $\mu = D_\gamma^m u$ si ottiene che l'intera successione è convergente. Utilizzando il Teorema di Fubini si ottiene che la mappa $y \mapsto \int |u_{k,y} - u_y|\, d\gamma_m$ converge a 0 in $L^1(\gamma)$, quindi a meno di passare ad una sottosuccessione possiamo supporre che $\int |u_{k,y} - u_y|\, d\gamma_m$ tende a 0 per $\gamma^\perp$-quasi ogni $y \in K$, e quindi utilizzando la semicontinuità della variazione si ottiene

$$\begin{aligned} V_\gamma^m(u) &\geqslant \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_m u(y)|\, d\gamma(y) = \liminf_{k\to\infty} \int |\nabla_m u_{k,y}|\, d\gamma^\perp(y) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \int V_{\gamma_m}(u_{k,y})\, d\gamma(y) \geqslant \int V_{\gamma_m}\, \gamma^\perp(y). \end{aligned}$$

Nel caso infinito dimensionale consideriamo l'approssimazione canonica $v_n = E_n u$. Dato che $E_n u \to u$ in L^1 possiamo trovare una sottosuccessione tale che $u_{n_i,y} \to u_y$ in $L^1(\mathbb{R}^m, \gamma_m)$ per $\gamma_m^\perp$-q.o. y, e quindi utilizzando la semicontinuità di $v \to V_{\gamma_m}$, il lemma di Fatou e la monotonia in n di $n \mapsto E_n u$ si ha

$$\int_K V_{\gamma_m}(u_{n_i,y})\, d\gamma_m^\perp(y) \leqslant \int_K V_{\gamma_m}(u_{n_i,y})\, d\gamma_m^\perp(y) \leqslant \sup_i V_\gamma^m(v_m) \leqslant V_\gamma^m(u)$$

□

Osservazione 2.69. Utilizzando il Teorema 2.70 si vede che l'ipotesi $u \in L\log^{1/2}L$ si può indebolire con $u \in L^1(\gamma)$, che data la definizione di V_γ è quella più naturale.

Sia $u \in L\log^{1/2}L$ tale che $V_\gamma^m(u) < \infty$. Dato che $V_\gamma^m(u) = \int V_{\gamma_m}(u_y)\, d\gamma_m^\perp(y)$ si ha che per $\gamma_m^\perp$-q.o. y vale $V_\gamma(u_y) < \infty$, quindi per $\gamma_m^\perp$-q.o. y esiste la misura $D_{\gamma_m} u_y \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ e quindi utilizzando il Teorema di Fubini per ogni $\varphi \in \mathcal{F}C_b^1(X)$ e per ogni $i \leqslant m$ si ha

$$\int \partial_i^* \varphi u\, d\gamma = \int_K \int_{\mathbb{R}} \partial_i^* \varphi_y u_y\, d\gamma_m\, d\gamma_m^\perp = \int_K \int_{\mathbb{R}^m} \varphi\, dD^i_{\gamma_m} u_y\, d\gamma_m^\perp(y),$$

dove $D^i_{\gamma_m} u_y = \langle e_i, D_\gamma u_y\rangle$. Da questa uguaglianza si vede facilmente che se $u \in \mathrm{BV}(X,\gamma)$, allora $[D_\gamma u, h_i] = \int D^i_{\gamma_m}\, d\gamma_m^\perp$, e quindi ragionando per componenti si dimostra che $\int |D_{\gamma_m} u_y|\, d\gamma_m^\perp \geqslant \int |D_{\gamma_k}|\, d\gamma_k^\perp$ ogni volta che $m > k$. Inoltre si vede facilmente che

$$V_\gamma^m(u) = \Big| \int D_{\gamma_m} u_y\, d\gamma_m^\perp \Big|(X) \leqslant \int |D_{\gamma_m} u_y|(H_m)\, d\gamma_m^\perp = \int V_{\gamma_m}(u_y)\, d\gamma_m^\perp,$$

e quindi $\int |D_{\gamma_m} u_y|\, d\gamma_m^\perp = \left| \int D_{\gamma_m} u_y\, d\gamma_m^\perp \right|$. Sia ora $n > m$. Osserviamo che per $\gamma_n^\perp$ quasi ogni $x \in H_n$ si ha $V^m_{\gamma_n}(u_x) < \infty$ e quindi utilizziamo un procedimento simile a quello appena fatto per $X = H_n$ e $\gamma = \gamma_n$ otteniamo una misura $\int |D_{\gamma_m} u_y| \gamma_{n\ominus m}$, dove $\gamma_{n\ominus m}$ e tale che $\gamma_n = \gamma_m \otimes \gamma_{n\ominus m}$. Utilizzando il Teorema di Fubini è facile dimostrare che

$$\int D_{\gamma_m}(E_n u)_y\, d\gamma_m^\perp = \iint (D_{\gamma_m}(E_n u)_y\, d\gamma_{n\ominus m})\, d\gamma_m^\perp,$$

dove la funzione $E_n u$ nella parte destra dell'eguaglianza viene considerata come funzione su H_n. Inoltre utilizzando l'Osservazione 2.66 si ha che

$$\int |D_{\gamma_m} u_y|\, d\gamma_m^\perp \geqslant \int |D_{\gamma_m}(E_n u)_y|\, d\gamma_m^\perp.$$

Teorema 2.70. *Sia $u \in L^1(\gamma)$. Allora le seguenti sono equivalenti*

(i). u appartiene a $\mathrm{BV}(X,\gamma)$;

(ii). la variazione $V_\gamma(u)$ è finita;

(iii). $L_\gamma(u) := \inf \left\{ \liminf \int_X |\nabla_H u_n|_{H(\gamma)}\, d\gamma, u_n \in \mathbb{D}^{1,1}(X,\gamma)\ u_n \to u \ \ in\ L^1(\gamma) \right\}$;

(iv). $u \in L\log^{1/2}L(X,\gamma)$ ed $\mathcal{I} < \infty$

Inoltre, $|D_\gamma u| = V_\gamma(u) = L_\gamma(u) = \mathcal{I}[u]$.

Dimostrazione.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Dato che l'insieme in cui prendiamo l'estremo inferiore in Definizione 2.59 è contenuto in quello di Definizione 2.65, si ha $V_\gamma(u) \leqslant |D_\gamma u|(X)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sia (t_n) una successione infinitesima e poniamo $u_n = T_{t_n} u$. Allora per l'Osservazione 2.67 si ha $u_n \in \mathbb{D}^{1,1}$e quindi per ogni $\phi \in \mathcal{F}C_b^1$ vale

$$\int_X [\nabla_H u_n, \phi]\, d\gamma = \int_X u_n \nabla_H^* \phi\, d\gamma.$$

Inoltre si ha

$$\int_X [\nabla_H u_n, \phi]\, d\gamma = -e^{-t_n} \int_X u \nabla^*(T_{t_n}\phi)\, d\gamma \leqslant V_\gamma(u),$$

e quindi $\|\nabla_H u_n\| \leqslant V_\gamma(u)$. Da cui si ottiene che $L_\gamma(u) \leqslant V_\gamma(u)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Sia quindi (u_n) una successione in $L^1(\gamma)$ tale che $u_n \to u$ in $L^1(\gamma)$ e $\|\nabla_H u_n\| \to L_\gamma(u)$. Allora si ha

$$\int_X |\nabla_H T_t|_H \, d\gamma \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |\nabla_H T u_n|_H \, d\gamma = L_\gamma(u).$$

Inoltre, per il Lemma di Fatou e la diseguaglianza di Gauss-Sobolev si ha

$$\int_0^\infty \mathscr{U}(\gamma(\{|f| > t\}))\, dt \leqslant L_\gamma(u) < \infty, \tag{2.3.14}$$

e quindi $u \in L\log^{1/2} L(X, \gamma)$.

(iv)$\Rightarrow$ (i) Dimostriamo ora che per ogni j esiste la derivata μ_j lungo la direzione h_j. Dato che $T_t u \in \mathbb{D}^{1,1}$ per ogni $t > 0$, si ha

$$V_\gamma^{h_j} = |D_\gamma^{h_j T_t u}|(X) = \int_X |\partial_j T_t u| \, d\gamma(x),$$

e quindi ponendo $\nu = h_j$ ed utilizzando il Teorema 2.68 si ha

$$\int_K V_{\gamma_1}((T_t u)_y)\, d\gamma^\perp(y) = \int |\partial_j T_t u| \, d\gamma \leqslant \int \|\nabla_H T_t u\|_H \, d\gamma.$$

Dato che $T_t u \to u$ in L^1 è possibile scegliere $t_n \to 0$ tali che $(T_{t_n} u) \to u_y$ in $L^1(\gamma_1)$ per $\gamma_1^\perp$-q.o. $y \in K$ e quindi utilizzando la semicontinuità inferiore della variazione si ha

$$\int V_{\gamma_1}(u_y)\, d\gamma^\perp(y) \leqslant \mathfrak{I}(u) < \infty.$$

Utilizzando l'Osservazione 2.69 è possibile costruire una misura μ tale che

$$\mu_j(A) = \int D_{\gamma_1} u_y(A_y)\, d\gamma^\perp(y).$$

Ponendo $\mu_j = D_\gamma^{h_j}$ ed utilizzando un argomento di densità è sufficiente dimostrare che

$$\sum_{i=1}^m \int \phi_i \mu_i \leqslant \mathfrak{I}(u),$$

per ogni $\phi_i \in \mathcal{F}C_b^1$ con $\sum_i \phi^2 \leqslant 1$. Integrando per parti possiamo ridurci ulteriormente a

$$\limsup_{t\downarrow 0} \sum_{i=1}^m \int \phi_i \, dD_\gamma^{h_i} T_t u \leqslant \mathfrak{I}(u),$$

oppure equivalentemente

$$\limsup_{t\downarrow 0} \sum_{i=1}^m \int \phi_i \partial_i T_t u \, d\gamma \leqslant \mathfrak{I}(u).$$

Quest'ultima è banale poiché $|\sum_1^m \phi_i \partial_i T_t u| \leqslant \|\nabla_H T_t u\|_H$. Passando al limite per $t \downarrow 0$ nella diseguaglianza si ha

$$\int_X \|\nabla_H T_{t+s} u\|_H \, d\gamma \leqslant e^{-t} \int_X \|\nabla_H T_s u\|_H \, d\gamma$$

e quindi $\int \|T_t u\|_H \, d\gamma \leqslant e^{-t} \mathfrak{I}(u)$ il che dimostra l'ultima implicazione. $\square$

2.3.1 *Misura di Gauss-Hausdorff di codimensione uno*

Vogliamo ora introdurre l'equivalente della misura di Hausdorff di codimensione 1 su spazi di Wiener. La costruzione di tale misura, esposta nel seguito, si basa sugli argomenti presenti nel lavoro di D. Feyel e A. de la Pradelle [24]. La definizione di misura Gauss-Hausdorff presente in questo articolo differisce leggermente da quella presentata in questa sezione. Come vedremo nell'Osservazione 2.78 questo fatto non incide sulla sostanza del risultato presente nella prossima sezione. Denoteremo con $\mathcal{S}^k$ la misura di Hausdorff sferica di dimensione k i.e. la misura ottenuta con il procedimento di Carathèodory avente come funzione di gauge $\zeta(A) = \operatorname{diam}(A)^k$ e come insiemi test le palle.

Definizione 2.71. Sia $n \in \mathbb{N}$. Denoteremo con θ^{n-1} la misura di Borel su H_n definita tramite

$$\theta^n(A) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_A \exp\Big(- \frac{\|x\|^2}{2} \Big)\, d\mathcal{S}^{n-1}(x) \qquad \forall\ A \in \mathcal{B}(H_n).$$

e denoteremo con ρ_n la misura su X definita tramite la formula

$$\rho_n(A) = \int \theta^{n-1}(A_y)\, d\gamma_n^{\perp}(y), \tag{2.3.15}$$

dove $A_y := \{x \in H_n :\ x + y \in A\}$.

Dato che $\mathcal{S}^{n-1}$ non è σ-finita, dimostrare che la formule (2.3.15) definiscono effettivamente delle misure è molto delicata. Una possibile dimostrazione si può trovare in [23, 24].

Osservazione 2.72. Le misure $\{\rho_n\}$ sono crescenti. Utilizzando il Teorema di Fubini è facile vedere che quest'affermazione segue da $\mathcal{S}^{n-1} \times \mathcal{L}^{m-n} \leqslant \mathcal{S}^{m-1}$.

Per dimostrare quest'ultima notiamo che per ogni $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ si ha

$$B((u,v),r)_y = \{z :\in \mathbb{R}^n :\ (y,z) \in B((u,v),r)\} = B(v, (r^2 - |y-u|^2)^{1/2}),$$

se $|y-u| < r$ altrimenti è l'insieme vuoto. Quindi si ha

$$\begin{aligned}\int \operatorname{diam}(B((u,v),r)_y)^{n-1}\, d\mathcal{L}^{m-n}(y) &= \int_{B(u,r)} \omega_{n-1}(r^2 - |y-u|^2)^{(n-1)/2}\, d\mathcal{L}^l(y) = \omega_{k+l} r^m \\ &= \operatorname{diam}(B((u,v),r))^{n-1}\end{aligned}$$

e quindi se $\mathcal{G}$ è una famiglia numerabile di palle che ricopre A, allora per ogni $y \in \mathbb{R}^{m-n}$ si ha $\mathcal{G}_y = \{B_y : B \in \mathcal{G}\}$ ricopre A_y e quindi

$$\sum_{B \in \mathcal{G}} \operatorname{diam}(B)^m = \int \operatorname{diam}(B_y)^{n-1}\, d\mathcal{L}^{m-n}(y) \geqslant \int \mathcal{S}^{n-1}(A_y)\, d\mathcal{L}^{m-n}(y).$$

Definizione 2.73. Definiamo la misura di Gauss-Hausdorff ρ di co-dimensione 1 tramite la formula

$$\rho(A) = \sup \rho_n(A).$$

Utilizzando l'Osservazione 2.72 si ottiene la monotonia di ρ_n in n e quindi utilizzando le osservazioni al inizio di questo capito otteniamo che ρ è una misura.

Osservazione 2.74. La misura ρ per com'è stata definita può dipendere dalla scelta di $\left\{x_j^*\right\}$. Nel lavoro originale [23], per ovviare la dipendenza di ρ dalla scelta di $\left\{x_j^*\right\}$, l'estremo superiore veniva preso su tutte le possibili scelte di $\left\{x_j^*\right\}$.

2.3.2 *Una generalizzazione del Teorema di Struttura*

Definizione 2.75. Sia A un insieme di Borel in X. Definiamo

$$\partial_*^n A := \left\{ x \in X : \pi_n(x) \in \partial_* A_{\pi_n^\perp(x)} \right\},$$

dove $A_{\pi_n^\perp(x)} := \{x \in H_n : \ x + y \in A\}$. Definiamo la frontiera essenziale tramite

$$\partial_* A = \liminf \partial_*^n A.$$

Proposizione 2.76. *Se A è un insieme di a Borel in X, allora $\partial_* A$ è un insieme di Borel.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $\partial_*^n A$ è un insieme Boreliano. Fissiamo $r > 0$. Dato che la mappa

$$H_n \times H_n \times \tilde{H}_n \ni (x, w, y) \mapsto \chi_{B(x,r)}(w)\chi_A(w + y)$$

è di Borel e utilizzando il Teorema di Fubini si ha

$$H_n \times \tilde{H}_n \ni (x, y) \mapsto \int \chi_{B(x,r)}(w)\chi_A(w + y)\mathcal{L}^m(dw)$$

è misurabile secondo Borel. Da cui si ottiene che $z \mapsto \mathcal{L}^m(B(\pi_n(z), r)A_{\pi_n^\perp(z)}$ è Boreliana in $z \in E$.

Se $2^{-j-1} < r < 2^{-j}$, allora si ha

$$2^{-n}\frac{\mathcal{L}^n(B(x, 2^{-j-1}))}{\omega_n 2^{-(j+1)n}} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r))}{\omega_n r^n} \leqslant 2^n \frac{\mathcal{L}^n(B(x, 2^{-j}))}{\omega_n 2^{-jn}},$$

e quindi si ottiene facilmente l'equivalenza dei seguenti insiemi

$$\begin{aligned} C &= \left\{ x \in X : \ \limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(\pi_n(x), r)) \cap A_{\pi_n^\perp(x)}}{\omega_n r^n} > 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in X : \ \limsup_{j \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(B(\pi_n(x), 2^{-j})) \cap A_{\pi_n^\perp(x)}}{\omega_n 2^{-jn}} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Quindi utilizzando la seconda espressione e facile verificare che l'insieme C è Boreliano. In maniera analoga si dimostra che $\{x \in X : \ \limsup_{r \downarrow 0} \omega_n^{-1} r^{-n} \mathcal{L}^n(B(\pi_n(x), r) \setminus A_{\pi_n^\perp(x)}) > 0\}$ è Boreliano. Infine dato che l'intersezione di questi due insiemi definisce $\partial_*^n A$ si conclude. $\square$

Diamo ora risultato analogo al teorema di struttura per gli insiemi di perimetro finito di De Giorgi dovuto a M. Hino.

Teorema 2.77. *Sia A un insieme di Borel in X avente perimetro finito. Allora $|D\chi_A|$ coincide con la misura ρ ristretta al insieme $\partial_* A$ i.e.*

$$|D_\gamma \chi_A|(B) = \rho(B \cap \partial_* A), \qquad \forall B \in \mathcal{B}(X). \tag{2.3.16}$$

In particolare se σ è la decomposizione polare per $D_\gamma \chi_A$, allora

$$\int_A (\nabla^* \Phi) d\gamma = -\int_{\partial_* A} [\Phi, \sigma]_H d\rho \qquad \forall \Phi \in \mathcal{F}C_b^1(X, H).$$

Dimostrazione. Fissiamo alcune notazione che utilizzeremo durante questa dimostrazione.

Siano $k, m \in \mathbb{N}$ tali che $m > k$. Denoteremo con $H_m \ominus H_k = \operatorname{span}\{h_{k+1}, \ldots, h_m\}$ e con $\gamma_{m\ominus k}$ la misura tale che $\gamma_k \otimes \gamma_{m\ominus k} = \gamma_m$ e quindi $\gamma = \gamma_k \otimes \gamma_{m\ominus k} \otimes \gamma_m^\perp$. Infine, utilizzeremo anche la notazione introdotta nell'Osservazione 2.69 i.e. $\mu^k = \int |D_{\gamma_m}(A)_y|\, d\gamma_m^\perp$. Per ogni $y_m \in H_m$ e $x \in H_m \ominus H_k$ sia

$$(A_{y_m})_x = \{w \in H_k :\ x + w \in A_{y_m}\} = \{w \in H_k :\ x + w + y_m \in A\}.$$

Come mostrato nell'Osservazione 2.69 per ogni $C \subset X$ si ha $\mu^k(C) \leqslant \mu^m(C)$, da cui ponendo $C = X \setminus \partial_*^n A$ si ottiene

$$0 = \mu^m(C) = \int |D_{\gamma_m}\chi_{A_y}|(C_y)\, d\gamma_m^\perp(y) \geqslant \int |D_{\gamma_k}\chi_{(A_{y_k})}|((C_{y_k}))\ d\gamma_k^\perp(y_k)$$

E quindi per $\gamma_k^\perp$-q.o. $y_k \in \tilde{H}_k$, si ha $\partial_*(A_{y_k}) \subset (\partial^m A)_{y_k}$ a meno di insiemi $|D_{\gamma_k}\chi_{A_{y_k}}|$-nulli. Prendendo il limite inferiore su n si ha

$$\partial_*(A_{y_k}) \subset \liminf_{m\to\infty}(\partial_*^m A)_{y_k} = (\partial_* A)_{y_k}$$

Sia B un insieme Boreliano. Allora $\gamma_k^\perp$-q.o. $y_k \in \tilde{H}_k$ si ha

$$|D_{\gamma_k}\chi_{A_{y_k}}|(B_{y_k}) = \theta^{k-1}(\partial_*(A_{y_k}) \cap B_{y_k}) \leqslant \theta^{k-1}((\partial_*^m A)_{y_k} \cap B_{y_k}) \leqslant \theta^{k-1}((\partial_*^m A \cap B)_{y_k})$$

Integrando ambo i membri rispetto a $\gamma_k^\perp$ si ottiene

$$\mu^k(A) \leqslant \rho_k(\partial_* A \cap B)$$

e quindi passando al limite in k si ha $|D_\gamma \chi_A|(B) \leqslant \rho(\partial_* A \cap B)$.

Per dimostrare l'altra diseguaglianza osserviamo utilizzando l'Osservazione

$$\int_{H_m\ominus H_k} \theta^{k-1}((\partial_* A \cap B)_x)\, d\gamma_{m\ominus k}(x) \leqslant \theta^{m-1}(\partial_*(A_{y_m}) \cap B_{y_m}) = |D_{\gamma_m}\chi_{A_{y_m}}|(B_{y_m})$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned}
\rho_k(\partial_*^m A \cap B) &= \int \theta^{k-1}((\partial_*^m A \cap B)_{y_k})\gamma_k^\perp(y_k) \\
&= \int_{\tilde{H}_m} \left(\int_{H_m\ominus H_k} \theta^{k-1}((\partial_*(A_{y_m}) \cap B_{y_m})_x)\, d\gamma_{m\ominus n}(x) \right) d\gamma_m^\perp \\
&= \int_{\tilde{H}_m} \left(\int_{H_m\ominus H_k} |D\chi_{(A_{y_m})_x}|((B_{y_m})_x)\, d\gamma_{m\ominus n}(x) \right) d\gamma_m^\perp \leqslant \mu^m(B) \leqslant |D_\gamma\chi_A|(B).
\end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che utilizzando il Lemma di Fatou si ha

$$\rho_k(\partial_* A \cap B) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \rho_k(\partial_*^m A \cap B) \leqslant |D_\gamma\chi_A|(B).$$

Infine passando al limite per $k \to \infty$ si ottiene

$$|D_\gamma\chi_A|(B) \leqslant \rho(\partial_* A \cap B)$$

e quindi mettendo insieme le due diseguaglianze si ottiene $|D_\gamma\chi_A|(B) = \rho(\partial_* A \cap B)$, il che conclude. $\square$

Osservazione 2.78. Come abbiamo già osservato in precedenza la misura ρ come la frontiera essenziale ∂_* può dipendere dalla scelta di $\left\{x_j^*\right\}$. Dato che $|D_\gamma \chi_A|$ è indipendente dalla scelta di $\left\{x_j^*\right\}$ per ogni insieme Boreliano B passando al estremo superiore su tutte le possibili scelte di $\left\{x_j^*\right\}$ si ottiene

$$|D_\gamma \chi_A|(B) = \varrho(B \cap \partial_* A),$$

dove ϱ è la misura di 1-codimensionale come nei lavori [23][24], e quindi a meno di insiemi ϱ-nulli la frontiera essenziale è univocamente determinata.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Ambrosio. *Corso introduttivo alla teoria geometrica della misura ed alle superfici minime*. Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola. [Notes of Courses Given by Teachers at the School]. Scuola Normale Superiore, Pisa, 1997.

[2] L. Ambrosio, G. Dal Maso, M. Forti, M. Miranda, and S. Spagnolo. Ennio De Giorgi. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 2(1):3–31, 1999.

[3] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[4] L. Ambrosio, S. Maniglia, M. M. Jr, and D. Pallara. Towards a theory of bv functions in abstract wiener spaces, 2008.

[5] L. Ambrosio, S. Maniglia, M. M. Jr, and D. Pallara. Bv functions in abstract wiener spaces. 2009.

[6] V. I. Bogachev. *Gaussian Measures*. Mathematical Surveys and Monographs ; 62. American Mathematical Society, 1998.

[7] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. I*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[8] V. I. Bogachev. *Measure theory. Vol. II*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[9] J.-M. Bony. *Course d'analyse: Théorie des distributions et anylse de Fourier*. Les Éditions de L'École Polytechnique, 2001.

[10] J. B. Conway. *A course in functional analysis*. Graduate texts in mathematics ; 96. Berlin : Springer Verlag, 1985.

[11] J. B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[12] G. Da Prato. *An introduction to infinite-dimensional analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Revised and extended from the 2001 original by Da Prato.

[13] G. Da Prato, P. Malliavin, and D. Nualart. Compact families of Wiener functionals. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(12):1287–1291, 1992.

[14] E. De Giorgi. Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 36:191–213, 1954.

[15] C. De Lellis. *Rectifiable sets, densities and tangent measures*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[16] C. Dellacherie and P.-A. Meyer. *Probabilities and potential*, volume 29 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.

[17] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr. *Vector measures.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15.

[18] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Part I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.

[19] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Part II.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[20] K. Falconer. *Techniques in fractal geometry.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.

[21] K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*, volume 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[22] H. Federer. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[23] D. Feyel. Hausdorff-Gauss measures. In *Stochastic analysis and related topics, VII (Kusadasi, 1998)*, volume 48 of *Progr. Probab.*, pages 59–76. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[24] D. Feyel and A. de La Pradelle. Hausdorff measures on the Wiener space. *Potential Anal.*, 1(2):177–189, 1992.

[25] M. Fukushima. *BV* functions and distorted Ornstein Uhlenbeck processes over the abstract Wiener space. *J. Funct. Anal.*, 174(1):227–249, 2000.

[26] M. Fukushima and M. Hino. On the space of BV functions and a related stochastic calculus in infinite dimensions. *J. Funct. Anal.*, 183(1):245–268, 2001.

[27] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[28] M. Hino. Sets of finite perimeter and the hausdorff-gauss measure on the wiener space, 2009.

[29] J. E. Hutchinson. Fractals and self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(5):713–747, 1981.

[30] S. G. Krantz and H. R. Parks. *Geometric integration theory.* Cornerstones. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008.

[31] H. H. Kuo. *Gaussian measures in Banach spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 463. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[32] M. Ledoux. Isopérimétrie et inégalités de Sobolev logarithmiques gaussiennes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 306(2):79–82, 1988.

[33] M. Ledoux. Isoperimetry and Gaussian analysis. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1994)*, volume 1648 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–294. Springer, Berlin, 1996.

[34] W. Linde. *Probability in Banach spaces—stable and infinitely divisible distributions.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, second edition, 1986.

[35] W. Linde and G. Siegel. On the convergence of types for Radon probability measures in Banach spaces. In *Probability in Banach spaces 6 (Sandbjerg, 1986)*, volume 20 of *Progr. Probab.*, pages 234–251. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[36] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[37] M. Métivier. *Notions fondamentales de la théorie des probabilitées.* Dunod Université, 1968.

[38] C. A. Rogers. *Hausdorff measures.* Cambridge University Press, London, 1970.

[39] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1973. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.